ESTADISTICA EXPERIMENTAL

HERRAMIENTAS PARA INVESTIGACIÓN

J.C. Romaina

2012

UPT –PERU

FONDO EDITORIAL

UNIVERSIDAD PRIVADA DE TACNA

ESTADÍSTICA EXPERIMENTAL
Herramientas para investigación

J.C. Romaina

Profesor de Estadística de la Universidad Privada de Tacna y miembro de la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa de Madrid- España

"Se debe aprender haciendo las cosas, pues aunque creas que lo sabes, no estarás seguro hasta que los pruebes"

ESTADISTICA EXPERIMENTAL

Herramientas para Investigación

Juan Carlos Romaina

Primera edición 2012

FONDO EDITORIAL UPT-PERÚ

UNIVERSIDAD PRIVADA DE TACNA

Para mi madre Juana Natividad, para quien va
este recuerdo permanente como un homenaje a su memoria y Don Alberto
Bendayán García, su compañero hasta los últimos días de su existencia.
Para mi querida esposa Elva Inés y nuestros hijos
Alan, Charly y Mariale

CONTENIDO

PRÓLOGO

Imbuido por la motivación de la primera publicación de mi libro de *Estadística, Herramientas para el desarrollo de las organizaciones*, estoy iniciando una nueva "aventura" intelectual poco menos emotiva, pero igualmente de una trascendencia extraordinariamente innovador, como afirmamos en la primera obra, espero que en ésta hayan podido fluir las ideas con mayor facilidad y poder concatenar los conceptos que abordamos en el contenido del presente libro.

En materia de experimentación, es cierto que los jóvenes intelectuales, profesionales, estudiantes, todos proactivos y emprendedores, pueden encontrar en la red una vasta información que les puede ayudar a emprender sus tareas investigativas. Sin embargo, el aporte físico de un libro, es hasta hoy insustituible, como diría el profesor Conrado de la lucía, el libro es "objeto de la cultura", no tengo la menor idea hasta cuándo será, cuando esto suceda estaré "adornando" alguna columna en la Gran Mansión Celestial.

Queridos lectores, en esta ocasión vamos a abordar, al inicio, temas que os ayuden en el planteamiento de trabajos de investigación, desde la idea inicial de investigación hasta la concreción de la misma. Es por ello que, hacemos una revisión de la metodología del estudio de la ciencia y el conocimiento, buscando la verdad en todo ello y sobre todo el aporte en el campo de la investigación básica, revisando y proponiendo conceptos conocidos, así como la investigación aplicada, extrapolando los resultados a una realidad concreta, puesto que el conocimiento de la ciencia que enriquece toda investigación, es relevante en el momento de discernir sobre la factibilidad científico de un estudio.

En la segunda parte del texto, es decir a partir del segundo capítulo, desarrollamos las principales herramientas para el planteamiento de los diseños experimentales, abordando con detalle las pruebas estadísticas adecuadas para la validación de una investigación, incidiendo en los principios de los experimentos que ayudan en el planeamiento del mismo. Imbuir al lector de ideas claras para el planeamiento de experimentos, le ayudará a tener una visión amplia y clara de fenómenos naturales, físicos, sociales y de la forma de abordar un proyecto de investigación. Se hace una revisión importante de las pruebas de hipótesis que fortalece el conocimiento y la seguridad de los investigadores al momento de analizar los resultados de un trabajo de investigación, especialmente, cuando de probar medias, proporciones y diferencias se trata. Afortunadamente, contamos con paquetes informáticos que contribuyen a la solución de problemas en tiempo más reducido, sobre todo, el tratamiento de los principales diseños de experimentos que se usan en las investigaciones cuantitativas y cualitativas o de distribuciones libres.

En el último capítulo del libro, tratamos de un tema no nuevo, pero actual, las pruebas no paramétricas como instrumentos de investigación, este último muy de moda y empleado en los últimos años, que tiene la ventaja de tratar una muestra sin importar el patrón de distribución de una población, es decir, con distribuciones libres, y que muy bien puede usarse en investigaciones cualitativas, en la cual los académicos están poniendo mucho énfasis para emprender estudios de esa naturaleza. La herramienta informática en la cual nos apoyamos para la solución de una gran cantidad de datos experimentales, es el paquete Statgraphics Centurion, una herramienta muy útil para la solución de problemas de investigación.

Este libro, resume el esfuerzo final de años de estudio desarrollado en la vida académica y profesional, resultado de esa continua interacción estudiante-profesor –entorno, tiempo en el cual realizamos consultas y recibimos sugerencias de colegas y alumnos respecto a la primera publicación del libro, ya citado, tratando de superar los inconvenientes, así como errores tipográficos observados en él. No significa lo manifestado, que en el presente no pudiesen aparecer hechos similares, de antemano las disculpas a los lectores si esto llegase a ocurrir. En particular, debo expresar mi gratitud a la profesora Lic Sisi Mena , quien con la revisión y corrección de estilo ha hecho un aporte valioso a la obra. Siento un especial reconocimiento al profesor Fernando Heredia de la facultad de Educación, quien nos brindó consejos e ideas respecto a variables pedagógicas y psicológicas de relevante importancia en la investigación, que permitió plantear problemas de esa índole, en el capítulo *X*. Un agradecimiento sincero de siempre, a la Facultad de Ingeniería, a sus directivos, profesores y alumnos, quienes son la razón constante y permanente de nuestra preocupación a la mejora continua de nuestro desempeño en la cátedra. A la Universidad Privada de Tacna, en la persona de la señora rectora y vice-rectores y particularmente al Fondo Editorial UPT-PERU, por el ahínco y perseverancia para que los profesores de esta institución superior puedan dar a luz sus obras.

El autor

CAPÍTULO I

LÓGICA, INVESTIGACIÓN Y EXPERIMENTO

Para que el lector pueda entender con mayor discernimiento el significado de un sistema lógico de razonamiento inductivo es menester ocuparnos de conceptos elementales de lógica.

ORIGEN Y DEFINICIÓN DE LÓGICA

La lógica se origina en el hombre mismo, debido a su naturaleza interior, que busca permanentemente la verdad, evitando cometer error. Esta búsqueda permanente de la verdad del hombre, lo hace bajo reglas naturales que él mismo se plantea. Esto es, lo que los sabios conocen como la lógica natural o vulgar[1].

Sin embargo, el hombre como ser perfectible que busca su verdad, da origen a la lógica artificial o lógica científica, la misma que se preocupa de desarrollar su comportamiento exento de errores, siempre ceñidos a la rectitud que la lógica ordinaria no lo puede evitar.

La definición etimológica de la lógica se deriva de la palabra griega "logos", que es la razón, o la intelección o la facultad de pensar. Es una ciencia o arte racional, es decir, de la razón. "Ahora bien, ésta no sólo es racional por el hecho de que es según la razón, lo cual es común a todas las artes; sino también por el hecho de que versa acerca del acto de la razón misma, y esto como materia peculiar. Y por tanto, parece el arte de las artes, puesto que nos dirige en el acto de la razón, del cual proceden todas las arte". (Sto. Tomás)

La lógica es conocida también como la dialéctica, aunque ya en tiempos remotos la lógica ya es llamada dialéctica. La dialéctica se deriva del griego "**dialeguesdai"** cuyo significado actual es perorar, disertar; es decir, hablar consigo mismo o con otros.

Cuando decimos que la lógica es un arte, según Santo Tomás, no se refiere en exclusiva a las obras externas y hermosas que se desarrollan en su sentido estricto, sino que va más allá, la de conjugar un conjunto de leyes orientadas hacia la construcción de obras para un fin determinado cumpliendo el hombre con su finalidad de usar para conseguir fines supremos.

Así mismo, la lógica es ciencia, porque reúne este conjunto de leyes y las demuestra y las reúne en un conjunto llamado sistema científico. Es decir, la lógica, investiga verdades prácticas, por eso se puede decir que es una ciencia práctica y estas verdades no son más que acciones diarias de los hombres y mujeres, de las instituciones en nuestra sociedad. Por ejemplo, las verdades que se articulan con la ética se ocupan de ordenar la vida del hombre y las verdades articuladas con la lógica se ocupan del cultivo del pensamiento del hombre y así

[1] S.J. Leovigildo salcedo, en su "tratado de lógica"

de este modo, conducir su tránsito en un camino fructífero, pues, el objeto material y primario de la lógica es el conocimiento del intelecto humano que puede resumirse en tres operaciones; la aprehensión, el juicio y el raciocinio. Todo lo demás, como por ejemplo las palabras, puede considerarse secundario, puesto que son solamente signos del pensamiento.

La lógica estudia el pensamiento, dentro de sus propias reglas, es decir, el pensamiento recto en las operaciones de la razón, la misma que es depositaria del recto orden y de la recta adquisición de la verdad, puesto que está dentro de su objeto. En consecuencia, la lógica no atiende a la materia del pensamiento, esto significa que no valora si una proposición es verdadera, sino que valora la forma del pensamiento, si es legítima o es recta. Esto diferencia a la lógica de las otras ciencias, en lo formal, especialmente de la Filosofía y la Psicología

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Es aquel razonamiento en la cual se va de lo general a lo particular, por ejemplo, si se plantea un problema en la cual se identifica un conjunto de principios generales, y se quiere conocer qué sucederá bajo un conjunto específico de condiciones. Para la solución del problema, se recurre al razonamiento deductivo. Vamos a citar algunos ejemplos a fin de ilustrar este concepto.

Dado la fórmula general de la longitud de una circunferencia $C = 2\pi r$, ¿Cuál es la longitud de la circunferencia cuyo radio es 10 centímetros?

Dado la descripción de una serie de especies forestales en una región de la selva peruana, ¿a qué especie forestal debe pertenecer un determinado árbol maderable?

Dado un conjunto de normas de calidad en el procesamiento de productos agrícolas. ¿Qué norma debe emplearse en la elaboración de un producto agroindustrial con fines de exportación hacia un país desarrollado?

Dado un conjunto de procedimientos para la elaboración de productos de panificación. ¿Qué proporción de insumos debe utilizarse para elaborar un producto de panificación regional?

Dado una moneda equilibrada cuya probabilidad de caer “cara” cuando se lanza una vez al aire es de un medio. ¿Qué podrá suceder cuando dicha moneda se lanza al aire 50 veces?. A partir de estas preguntas se sugiere al lector, a manera de ganar competencia en el razonamiento deductivo, ensayar otros ejemplos que le ayuden a comprender el concepto.

En nuestra experiencia educativa, a lo largo de los años, con frecuencia nos encontramos con problemas similares en la cual, para encontrar la solución, recurrimos al razonamiento deductivo. Los empresarios agrícolas, industriales, comerciales y todos aquellos cuya actividad está relacionada con servicio al cliente, deberían tener algún conocimiento del razonamiento deductivo, la que le otorga el dominio de cierto conjunto de principios y leyes que debe aplicar en casos específicos que su actividad propia lo requiera.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Es el razonamiento de lo específico a lo general, es un problema planteado de forma contraria al razonamiento deductivo. En este razonamiento se generaliza para todos los elementos de un conjunto la propiedad observada en un número determinado de casos. Sin embargo, las conclusiones de un razonamiento inductivo sólo se consideran probables, lo que de hecho, demuestra a las claras que la información que se obtiene mediante este razonamiento es incierta y discutible
A continuación ilustramos el razonamiento inductivo con ejemplos de aplicación.

Si conocemos el valor del radio de un círculo. ¿Qué fórmula general podemos emplear para relacionar el radio y la longitud de la circunferencia?
Dado una serie de resultados en el empleo de una bacteria para la elaboración de un Yogurt dietético. ¿Qué recomendaciones generales se pueden plantear para la elaboración de un producto dietético?
Si obtenemos un resultado de aplicar una dosis de fertilización en un cultivo de exportación. ¿Qué recomendaciones se pueden describir para el futuro de estos productos?
Si un método de enseñanza para lograr capacidades en estudiantes universitarios en el dominio del manejo de equipos industriales ha dado un excelente resultado. ¿Qué se puede recomendar a los estudiantes respecto de este método?
Observe, que los problemas aquí planteados tienen algo en común, todos empiezan con un grupo de observaciones. En algunos casos, como por ejemplo en la descripción de una nueva especie, las observaciones de fenómenos son hechas simplemente en la medida en que éstos tienen lugar en la naturaleza. Sin embargo, por regla general, las observaciones se realizan bajo condiciones controladas. Los factores objeto de estudios se hacen variar en alguna forma sistemática, mediante la aplicación de tratamientos. Otros factores que pueden ejercer influencia sobre las observaciones son minimizadas hasta el punto en que la práctica lo permita.

1.4 EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Ya hemos manifestado líneas arriba, que la mayoría de problemas que atravesamos en nuestro proceso de aprendizaje desde los primeros años, hasta incluso la universidad, son de tipo deductivo. Del mismo modo, los problemas que afronta un empresario comercial o agrícola, son de tipo inductivo.
Entonces, la pregunta adecuada a plantear en este caso es, ¿cuál es el razonamiento que afrontan con frecuencia los investigadores agropecuarios?, esto nos permite a su vez plantearnos a manera de interrogantes, lo siguiente:
¿Afectará la aplicación de una labor cultural nueva en el rendimiento de los olivos en el valle de Tacna?, si es positivo, ¿en cuánto aumentará o reducirá este rendimiento? Es lógico y comprensible que las respuestas a estas interrogantes no se podrán resolver en su totalidad, ya que se deben tener en cuenta otros factores, como ser el riesgo y los costos de tomar una decisión incorrecta.
Sin embargo, la herramienta poderosa y al alcance de los investigadores, es la experimentación, actividad mediante la cual, a través de procesos de

observación, medición y anotación de resultados, se puede llegar a conclusiones relevantes para la actividad que desarrollamos (agropecuaria, comercial, industrial, pedagógica, etc). Un experimento más simple solamente debe contener dos tratamientos, el testigo o método tradicional y el nuevo o método tecnológico. Por el contrario, si deseamos desarrollar un experimento más complicado, debe contener más de dos tratamientos o nuevos métodos de prueba.

1.5 IDEAS DE INVESTIGACIÓN

En realidad, la generación de ideas de investigación está ligado a la experiencia del investigador, si se trata de investigadores noveles, estos deben recurrir a experiencias individuales, experiencias profesionales, resúmenes de eventos nacionales e internacionales, presentación de trabajos de investigación, observaciones de hechos en hospitales, en predios agrícolas, universidades, todos tienen un valor como generador de ideas de investigación. Sin embargo, para que estas ideas se puedan concretizar, es condición obligatoria que el investigador se introduzca en el área de conocimiento del tema elegido para desarrollar y precisar la idea. La idea de revisar las áreas del conocimiento, en casos prácticos, es importante porque, permite visualizar con ideas concretas, lo siguiente:

1º No investigar más de lo mismo, es decir, repetir sin innovar, investigaciones manoseadas, realizadas por otros investigadores.
2º Planear la estructura de la investigación en forma concreta
3º Seleccionar la idea principal, desde la cual se puede describir con cierta amplitud los objetivos de la investigación.

Una investigación no necesariamente debe ser nueva, si es novedosa, es un paso vital para el desarrollo de la investigación, esto es, con un nuevo enfoque que pueda solucionar un problema práctico o real. Los estudiantes que deseen emprender el desarrollo de una tesis universitaria, tienen que revisar el tema, ampliamente o revisar con profundidad la idea que tienen interés en emprender, de esta manera se ganará en capacidad y competencia en el área del conocimiento, hacia la cual está orientando su investigación.

1.6 EL ELEMENTO ALEATORIO

Para iniciar la discusión de este concepto, podemos manifestar que resulta difícil definirlo, sin embargo, la mayoría conoce su significado, y más aún conoce lo suficiente como para darle su importancia en la investigación.
Cuando un elemento aleatorio está inmerso en un problema de investigación, casi siempre se presentan dificultades. Sobre todo en el campo del razonamiento inductivo, mucho más que en el razonamiento deductivo.
Veamos en los ejemplos que describimos en los ítems 1.2 y 1.3, En el problema de encontrar la longitud de la circunferencia, en estos casos no se presenta incertidumbre en cuanto a conocer la respuesta. Para cualquier valor del radio de

la circunferencia se tendrá una longitud específica. De modo que, el elemento aleatorio no está presente en este problema. En lo que respecta al problema de lanzar muchas veces una moneda al aire, el resultado de obtener por ejemplo "cara", es una incertidumbre, teniendo como supuesto dos posibles resultados y además la moneda equilibrada, lo que supone resultados igualmente probables de obtener "cara o sello". Extrapolando esta situación al campo de la agricultura, por más conocimientos profundos y científicos que poseen los que conducen una cosecha en el campo, es imposible predecir el rendimiento del cultivo, ya que entran en juego muchos factores que no están controlados. Del mismo modo, ante el uso de raciones para estudiar el aumento de peso de animales vacunos bajo condiciones controladas, es igualmente difícil, poder estimar con exactitud este aumento, debido a la naturaleza propia de cada animal. En consecuencia, el elemento aleatorio está presente en el resultado debido a una serie de causas no controladas, las mismas que hacen variar estos resultados.

La aleatorización como principio de los experimentos, aseguran la validez de las estimaciones al evitar sesgos que pueden ser introducidos, debido al amplio campo de control que tiene el investigador cuando usa ciertos diseños experimentales sobre el material experimental. Puede aplicar a éste una aleatorización completa, sujeta desde luego a las restricciones propias del diseño. Así mismo, en procedimientos de muestreo es frecuente la dificultad que se presenta para realizar una completa aleatorización por causas de orden económico, social, técnico, etc, por lo que es inherente a los investigadores, la experiencia, a fin de salvar este principio importante, más aún en situaciones en las que nos vemos obligados a trabajar con muestras que son pequeñas. Hasta antes que Sir Ronald Fisher desarrollara el principio de la aleatorización, se usaban con cierto éxito los diseños sistemáticos, pero sin embargo, la utilidad de estos diseños, que se ha demostrado posteriormente, presentan dos dificultades sumamente importantes:

1º No existe una estimación válida del error experimental y
2º La correlación entre parcelas adyacentes pueden conducir a errores sistemáticos al estimar los efectos del tratamiento.

En el siguiente diagrama se ilustra las desventajas de un experimento sistemático.

Fig. 1.1

I	II	III	IV	V
A B C	A B C	A B C	A B C	A B C

En esta figura, asumimos que la pendiente natural del suelo va de izquierda a derecha y los tratamientos por orden de jerarquía también siguen la orientación de izquierda a derecha, por lo que los resultados van a mostrar definitivamente sesgo en las mediciones, es decir, el supuesto "mejor tratamiento", es adjudicado a la mejor parcela.

En experimentos que se conducen en localidades diferentes, la aleatorización debe ser independiente del lugar donde se lleva a cabo la investigación, no puede pensarse que el procedimiento de aleatorización debe seguir una regla para todas las localidades. Al respecto Wishart y Sanders (1955)[2] dicen lo siguiente: "Debe recalcarse el imperativo de tener aleatorizaciones separadas para cada ensayo. Algunos investigadores usan el mismo diseño con la misma aleatorización para diferentes experimentos, esto es insostenible, ya que invalida las pruebas estadísticas usadas en los resultados porque existe la posibilidad de que un ligero sesgo haya sido introducido a la aleatorización". Sin embargo, es conveniente sí, tener el mismo número de réplicas y tratamientos en cada localidad, a fin de facilitar el análisis de varianza combinado, este tema se tratará con mayor detalle en el capítulo IX.

1.7 LA NECESIDAD DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO

La mayoría de investigadores coinciden en que la estadística es la base para fortalecer los resultados de una investigación, es decir, es la que sienta las bases para una evaluación objetiva. Por ejemplo, si se cosechan dos áreas de cultivo similares en tamaño de una especie de maíz, los granos de maíz producido muy raramente pueden ser iguales; los pesos de los frutos del manzano adyacentes en una parcela, difícilmente es el mismo, aún, si se siembra en las mismas condiciones; la proporción en el aumento de peso de dos animales vacunos de la misma raza, para una determinada ración, casi siempre difieren. Las diferencias observadas tanto en los cultivos como en los animales son debido a diferencias en su constitución genética y a factores ambientales, lo que escapa a la capacidad del investigador. Estas diferencias o variabilidad observadas entre los animales y parcelas, se denomina error experimental.

Una vez que conocemos la existencia de esta variabilidad, es entendible la dificultad que se tiene para evaluar una nueva práctica, mediante su aplicación a una unidad experimental única y su comparación con otras unidades que son similares. El efecto de la nueva práctica se confunde con la variabilidad no determinada. Así, un experimento con una sola repetición va a suministrar una información incompleta del efecto del tratamiento; además, puesto que existen dos unidades igualmente tratadas, éste no suministra información del error experimental. El uso de la ciencia estadística permite superar estas dificultades, requiriendo la recolección de datos experimentales que permitirán una estimación imparcial de los efectos del tratamiento y la evaluación de las diferencias del tratamiento a través de pruebas de significación basadas en mediciones del error experimental.
Para poder observar de manera más significativa, los efectos de los tratamientos, estas deben aplicarse a por lo menos dos unidades experimentales por

[2] En su libro Principles and Practice of field Experimentation(1956)

tratamiento, aunque lo preferible es que sea mucho más, dependiendo del costo que esto puede representar. Así mismo, las pruebas de significación que se llevan a cabo para estudiar la factibilidad técnica, determinan la probabilidad de que las diferencias de tratamientos observados pudieran ser debido a una mera casualidad.
Los principios más importantes de los experimentos que obliga a los investigadores a seguir una ruta crítica y que son inherentes a todo tipo de proyectos de investigación, y al mismo tiempo esencial para el análisis estadístico, son:

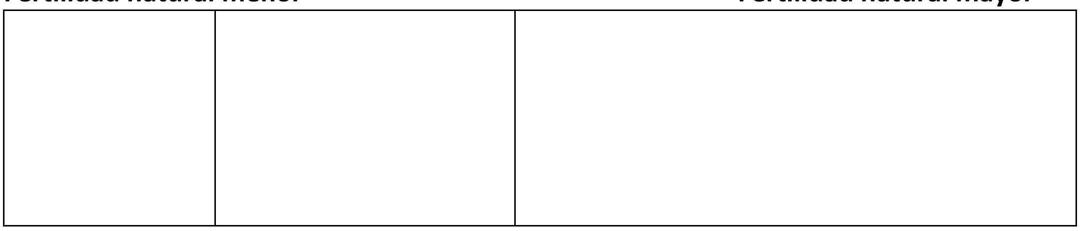
Repetición, un principio en el cual en una misma investigación se puede tener réplicas del tratamiento dos o más veces. Este procedimiento brinda mayor precisión en la medición del efecto del tratamiento como también suministra una estimación del error experimental. El número de repeticiones de un experimento siempre será la gran incógnita, la que se plantee el investigador. Aumentar el número de repeticiones es el medio más sencillo de incrementar la precisión con que se estiman los promedios y las pruebas de significación. El beneficio de aumentar el número de repeticiones es apreciable fácilmente cuando este incremento se hace en el caso en que, previamente, hayan menos réplicas que en el caso que hayan más. Se recomienda tener por lo menos diez grados de libertad para estimar eficientemente el error experimental, pero no es necesario replicar para tener más de 20 grados de libertad para el error. Llega un punto en que el aumento en precisión debido a otra éeplica no es lo suficientemente significativo como para que amerite el costo adicional que esto representa. Son dos las causas para determinar un número más adecuado de repeticiones, las diferencias entre los efectos de los tratamientos y la variabilidad de los datos que se recogen del trabajo de campo. Si el investigador, por más experimentado que sea, quiere evitarse ciertos malestares en sus resultados, deberá considerar estos dos aspectos.

Muestreo aleatorio, Este principio se refiere a la asignación de los tratamientos a las unidades experimentales, de tal manera que todas las unidades experimentales tengan la misma posibilidad de recibir un tratamiento. De esta manera, se busca asegurar estimaciones imparciales de las medias de los tratamientos y del error experimental. La aleatorización es un proceso independiente del pensamiento del investigador, es inherente a toda investigación, por ello el cuidado con que todo investigador mira este principio.
De acuerdo a la teoría frecuentista, la aleatorización permite realizar pruebas de causa y efecto y además construir pruebas válidas de significancia estadística.
Control Local, Al igual que la aleatorización, el Control Local es un principio relevante al momento de decidir la distribución de los tratamientos a las unidades experimentales, con el fin de controlar el error experimental, empleando la técnica de la formación de bloques.
La formación de bloques busca homogeneidad en las parcelas de campo y aún en laboratorio, de ahí que todos los tratamientos deben ser asignados aleatoriamente a cada bloque, de modo que estos se constituyen en réplicas del experimento. Los bloques por lo general pueden ser considerablemente diferentes, es

justamente este carácter que hace posible el control que se ejerce sobre el error experimental, dado que las unidades experimentales dentro de cada bloque son relativamente uniformes. Pero ¿qué factores son los más influyentes en el momento de formar los bloques?, la humedad natural del suelo y la fertilidad del mismo. Es frecuente encontrar suelos que presentan características de variabilidad en forma gradual de un sitio a otro del experimento. Cuando esto se observa, es preferible formar los bloques en forma perpendicular. Si la pendiente del suelo es un factor que incide en la gradualidad del suelo, los bloques se construyen de modo que corte esa pendiente, así evitamos sesgos que pueden aparecer en los resultados.

Fig 1.2

Fertilidad natural menor **Fertilidad natural mayor**



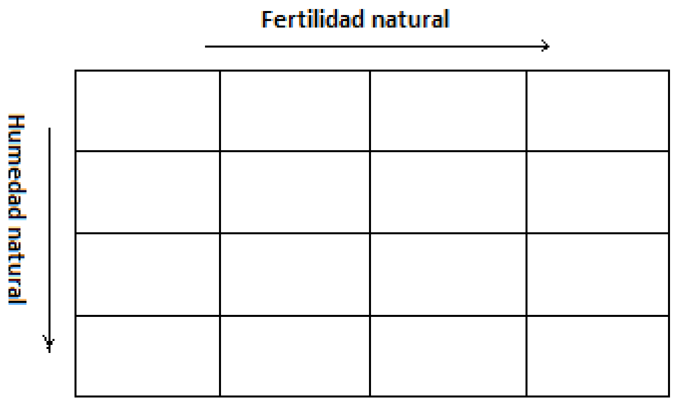
→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→ **Gradiente de la fertilidad natural**

En experimentos con animales, este principio se puede usar, considerando animales del mismo tamaño, de pesos similares, razas, etc.; pueden ser agrupados para formar bloques. En la industria, también es posible la formación de bloques cuando los procesos están vinculados con el tiempo, empleando las horas del día, días de la semana, etc.

El principio de la formación de bloques se utiliza con bastante eficiencia probada, en experimentos en los cuales el control del error experimental es de dos vías, como en diseño Cuadrado Latino.

En la figura 1.3, se ilustra un diseño con cuatro bloques, la figura muestra dos direcciones naturales; la humedad natural (vertical) por un lado y por el otro, la fertilidad natural del suelo (horizontal).

Fig. 1.3



En cuanto al Análisis de varianza, las fuentes de variabilidad se descomponen, para la humedad natural y la fertilidad natural del suelo. En este caso, el uso del doble bloqueo, proporciona un control de la variabilidad mucho más eficiente.

TÉRMINOS CLAVE

Lógica natural
Inducción
Deducción
Problemas de investigación
Experimentación
Aleatoriedad
Principios de experimentación
Control
Réplicas

Ejercicios Propuestos

1. Explique con precisión el concepto de control local
2. ¿Qué es el razonamiento inductivo y cuál es su aplicación práctica en una investigación?
3. ¿Qué es el razonamiento deductivo?
4. ¿Por qué es importante conocer los principios de los diseños de Experimentos?
5. Explicar en forma clara el procedimiento de formación de bloques
6. Manifestar detalladamente el concepto e importancia del uso de réplicas en una investigación.
7. Señalar, ¿cuál es la importancia del muestreo aleatorio en los diseños de experimentos?
8. ¿Cómo puede definir el concepto de error experimental?
9. Si se conduce un experimento con seis tratamientos y cuatro repeticiones. Ensayar una distribución aleatoria de las unidades experimentales.
10. A manera de práctica, se recomienda al lector realizar una serie de cinco ideas de investigación relacionados con su especialidad.
11. Señalar algunos ejemplos prácticos de razonamiento deductivo de su profesión.
12. Señalar ejemplos prácticos de razonamiento inductivo que tenga relación con su profesión.

13. Explique con fundamento, la importancia de emplear el método científico en experimentos.

CAPÍTULO II

EL MÉTODO CIENTÍFICO

Es el procedimiento que hace uso de la lógica y objetividad para emprender una investigación en forma sistemática con la finalidad de descubrir nuevos acontecimientos y principios de un determinado objeto para resolver un problema mediante la observación y la experimentación científica y que a pesar de la dificultad para definirlo con precisión, contiene los siguientes elementos:

Las observaciones experimentales
Contraste de Hipótesis
Intervalos de confianza
Resultados e interpretación

2.1 LAS OBSERVACIONES EXPERIMENTALES

Las observaciones que se realizan como resultado de un experimento, frecuentemente son datos numéricos, que describen la consecuencia obtenida en un experimento básico y elemental. Por ejemplo, en el experimento agrícola de estudiar un comparativo de cinco variedades de un tipo especial de ají, el dato relevante es la producción del producto, por parcela, puede considerarse, así mismo, el número de frutos por planta, peso de los frutos en forma individual, etc., depende en extremo de la naturaleza del estudio. Si medimos la producción, ésta podría describirse como la cantidad del producto deseado expresado en kilogramos, o en un porcentaje de la producción ideal estimado. En el ejemplo citado, la producción de las cinco variedades de ají, todas conducidas en forma idéntica, podrían haber proporcionado los siguientes datos:

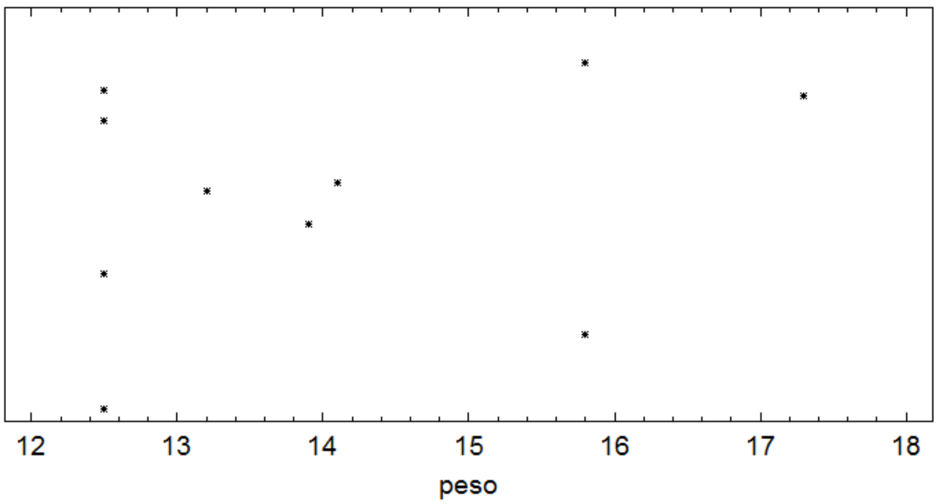
24.5 26.8 33.4 18.4 31.8

En un experimento de incremento de pesos de animales orientados a la producción de leche en el término de 30 días, los datos recogidos en kilos, para diez animales, puede ser:

12.5 13.2 15.8 17.3 14.1 13.9 12.5 15.8 12.5 12.5

En la figura 2.1 se presenta la dispersión de los datos numéricos de los aumentos de peso en un diagrama de dispersión. Este diagrama es una herramienta valiosa para la representación de datos en pequeñas cantidades. La figura nos muestra, la situación de las observaciones, respecto de un valor medio, en el gráfico, la mayoría de ellos se ubica alrededor del 13.5 y 14. Así mismo, nos muestra la amplitud de los datos.

Fig. 2.1 Gráfico de dispersión



Cuando las observaciones que se recogen de un experimento, son numerosos, debemos recurrir a otros procedimientos que la estadística descriptiva proporciona, porque no es muy sencillo representar mediante el diagrama de dispersión, puesto que debe construirse una distribución de frecuencias como en la tabla 2.1, cuyo gráfico típico es un histograma de frecuencias. La misma que se obtiene dividiendo el eje horizontal en intervalos de un tamaño apropiado y trazando en forma vertical sobre cada intervalo un rectángulo, cuya área debe ser proporcional al número de observaciones que caen en ese intervalo. La figura 2.2, muestra una distribución de frecuencias para $N = 120$ observaciones de exportaciones agrícolas logradas por empresas de bandera nacional. Cada observación que se anotó son cifras enteras. Dado que la menor observación se encuentra entre 118.9 y 123.61 y la mayor entre 161.29 y 166, es conveniente clasificar las observaciones en 10 intervalos de longitud común, como se observa en la tabla 2.1.
En la mayoría de los eventos, como en el presente, los diagramas de frecuencias tienen los intervalos iguales. Sin embrago, los histogramas pueden construirse con datos que se agrupan en intervalos diferentes, pero lo relevante en estos casos es que el área de los rectángulos de cada intervalo debe ser proporcional a las frecuencias de las observaciones en cada intervalo.

En el histograma de la fig. 2.2 puede observarse su situación y dispersión. Se puede ver, por ejemplo, otra característica, que alrededor del 47.5% de las empresas han alcanzado exportaciones entre 133.03 y 147.16 miles de dólares respectivamente.

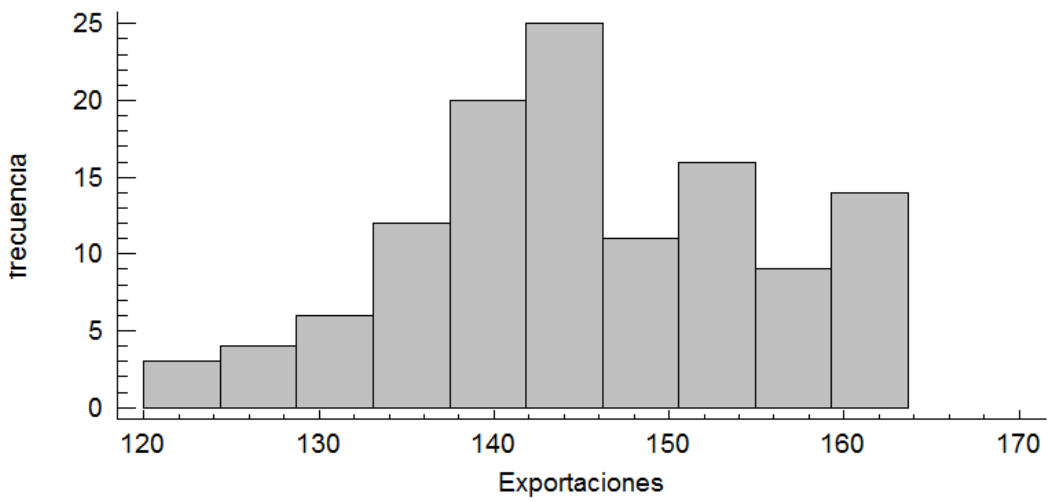
Tabla 2.1 Distribución de frecuencias para exportaciones

Clase	Límite Inferior	Límite Superior	Marca	Frecuencia	Frecuencia Relativa	Frecuencia Acumulativa	Frecuencia Acum.Relat
1	118.9	123.61	121.255	3	0.0250	3	0.0250
2	123.61	128.32	125.965	4	0.0333	7	0.0583
3	128.32	133.03	130.675	6	0.0500	13	0.1083
4	133.03	137.74	135.385	12	0.1000	25	0.2083
5	137.74	142.45	140.095	20	0.1667	45	0.3750
6	142.45	147.16	144.805	25	0.2083	70	0.5833
7	147.16	151.87	149.515	11	0.0917	81	0.6750
8	151.87	156.58	154.225	16	0.1333	97	0.8083
9	156.58	161.29	158.935	9	0.0750	106	0.8833
10	161.29	166.0	163.645	14	0.1167	120	1.0000
Media=146.1 Desviación típica=10.9953							

El StatAdvisor

Esta opción realiza una tabulación de frecuencias dividiendo el rango de exportaciones en intervalos de igual anchura y contando el número de valores de los datos en cada intervalo. Las frecuencias muestran el número de valores en cada intervalo, mientras que las frecuencias relativas muestran las proporciones en cada intervalo.

Fig. 2.2 Histograma para exportaciones



Cuando se extraen datos de una población, el conjunto de observaciones que podrían ocurrir como consecuencia de realizar una operación determinada de una forma específica, se denomina muestra. Para poblaciones grandes, los altibajos del diagrama de frecuencias debido a las variaciones muestrales tienden a desaparecer, obteniéndose un histograma como el que se muestra en la figura

2.2. Si hacemos el área del rectángulo levantado sobre el intervalo i-ésimo del histograma, igual a la frecuencia relativa, el área total debajo del mencionado histograma será igual a la unidad.

2.2 LOS CONTRASTES DE HIPÓTESIS

En las investigaciones, es de carácter obligatorio plantear hipótesis, luego deben ser probadas mediante el procedimiento de las pruebas de hipótesis. Sin embargo, el plantear hipótesis representa dificultad para los investigadores noveles, dado que las mismas deben cumplir con ciertas condiciones.
Ciertamente las hipótesis que vamos a manejar y que son de nuestro interés en este texto, son las hipótesis estadísticas, las mismas que deben ser planteados en tiempo presente, utilizando los verbos adecuados, que oriente al lector la relación entre las variables que se van a estudiar
Las hipótesis estadísticas son declaraciones o supuestos tentativos acerca del valor de un parámetro o parámetros de una población. Cuando manifestamos que son declaraciones tentativas, es debido a que los verdaderos valores de los parámetros en cuestión se desconocen. Gerentes de empresas privadas, los científicos, estrategas militares, políticos y muchas otras personas toman decisiones relativas a parámetros de la población. Algunos simplemente "suponen" los valores de los parámetros en forma empírica, mientras que otros realizan inferencias acerca de ellos, basándose en datos muestrales incompletos. Las pruebas de hipótesis pueden mostrar si una declaración tentativa se ve apoyada o rechazada por la evidencia de la muestra. En general, son cinco los pasos a seguir en las pruebas de hipótesis.

Paso 1, IDENTIFICACIÓN DEL PATRÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LA POBLACIÓN
Es importante para el investigador, considerar la forma de la distribución de la población que se va a estudiar, ¿es normal o binomial el patrón de la distribución?, o ¿sigue otro patrón diferente?. Ocurre, que la mayoría de problemas o fenómenos están relacionados de una manera u otra con la distribución normal y las que siguen otros patrones pueden aproximarse eficientemente mediante la distribución normal, si el tamaño de la muestra es suficientemente grande. Sin embargo, pueden presentarse algunas situaciones en las cuales no es aplicable la distribución normal. Entonces, en aquellas circunstancias, resulta necesario identificar la forma
que sigue la distribución, puesto que, en base a esa probabilidad de ocurrencia de la variable aleatoria se tomarán las decisiones más adecuadas de acuerdo al problema que tenemos que resolver.
Paso 2, PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS

En las investigaciones, se identifican dos tipos de hipótesis, la ***hipótesis nula***, que se identifica mediante H_0, cuya simbología alude, en el caso del cero, al carácter "nulo" o "inexistencia".

Podemos definir el concepto de hipótesis nula como[3]:

"La hipótesis nula, H_0, es una declaración tentativa de que un parámetro de la población es igual a un valor específico. A menudo en tal declaración está implícita la idea de que no hay diferencia y de ahí el nombre de hipótesis nula"

Por ejemplo, podemos tener el interés de conocer si el salario promedio mensual de trabajadores de empresas exportadoras es diferente de 800 dólares. Debido a esto, la hipótesis nula se debe plantear bajo el supuesto de que es igual a 800. En consecuencia, la hipótesis nula se formula como

$$H_0: \mu = 800$$

La hipótesis alternativa, se denota mediante H_1, es la hipótesis que deberá aceptarse cuando la hipótesis nula es rechazada, el mismo autor citado, define la hipótesis alternativa como:

"La hipótesis alternativa, H_1, es una declaración tentativa de que el mismo parámetro de la población tiene un valor diferente del especificado en la hipótesis nula"

En el mismo ejemplo, en la que se desea determinar el promedio mensual de los salarios de trabajadores de las empresas exportadoras, es diferente de 800, la que se plantea como:

$$H_1: \mu \neq 800$$

Significa que el promedio no es igual a 800. Así mismo, como resultado de la investigación se obtienen datos de muestra que sirven para determinar si existe suficiente evidencia estadística para aceptar la hipótesis alternativa. Si los datos de la muestra, extraída de la población muestran promedios claramente bajos, la hipótesis nula se debe rechazar. Del mismo modo, si los promedios son bastante altos la decisión también será rechazar la hipótesis nula a favor de la hipótesis alternativa. Esta prueba se denomina de dos colas, debido a que la hipótesis alternativa no especifica una orientación o dirección de la comparación.
Cuando la hipótesis alternativa muestra una dirección clara en el contraste, se puede plantear una hipótesis alternativa unilateral. Por ejemplo, el investigador puede estar interesado solamente en si el promedio de salarios de los trabajadores es mayor que 800. Si ese es el caso la hipótesis alternativa es:

$$H_1: \mu > 800$$

En este caso, la hipótesis nula se rechaza cuando la evidencia muestral proporciona un valor promedio suficientemente grande para la media μ. Por otro lado, si el interés es averiguar si el salario promedio es menor que 800, para los trabajadores, entonces la hipótesis alternativa se plantea como:

[3] Chao, Lincoln. "Introducción a la Estadística". Editorial CECSA. México, 1985

$H_1: \mu < 800$

Aquí se rechazará la hipótesis nula sólo si el valor de la muestra es suficientemente pequeño para μ. Las pruebas unilaterales, para la hipótesis alternativa, se denominan pruebas de una cola.

Ejemplo 2.1 Se conoce por antecedentes que el 10% de las unidades producidas en un proceso de manufactura son defectuosas. Mediante un estricto control de calidad el proceso de manufactura se modifica. Se espera que después de este cambio, la proporción de unidades defectuosas disminuya. A fin de probar lo adecuado del cambio, se selecciona una muestra aleatoria de n unidades para determinar si existe evidencia suficiente de que la proporción ha disminuido, con el nuevo proceso. Formular las dos hipótesis.

$H_0: p = 0.10$

y

$H_1: p < 0.10$

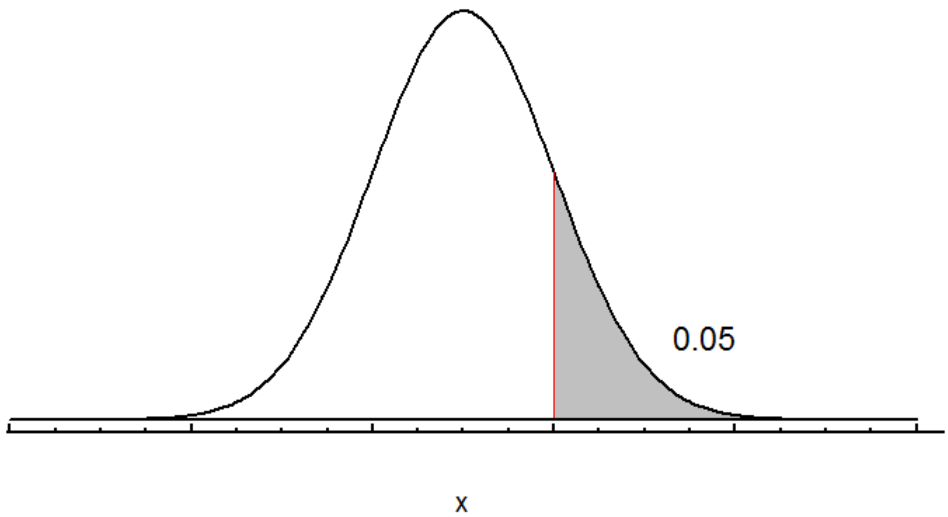
Paso 3, ESPECIFICACIÓN DEL NIVEL DE SIGNIFICACIÓN

En las investigaciones, frecuentemente se usan niveles convencionales de significación críticos. Estos niveles corresponden a las probabilidades que representan distintos niveles de incertidumbre. Cuando la probabilidad de que ocurra una desviación muy grande, respecto de un valor observado, es menor que el nivel de significación, la diferencia entre la observación y la hipótesis se dice que es significativa. Es común emplear niveles de significación del 1% y 5%, los que proporcionan siempre una buena referencia. El nivel de significación en pruebas de hipótesis se representan mediante la letra griega alfa, α, que es el nivel de error que se puede tolerar en una experimentación, es decir, la probabilidad de que la muestra haya proporcionado una medida lo suficientemente mayor que el valor hipotético debido a factores aleatorios. Cuando un valor supuesto suficientemente grande como para provocar el rechazo de la hipótesis nula ocurre una vez cada cien, entonces el nivel de error es del 0.01.
En consecuencia el nivel de significación es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es verdadera, lo que da pie a cometer un error de tipo I. En cuanto al término de significancia, se refiere no a la importancia de la hipótesis sino a la verosimilitud en vista de los datos. En otras palabras, un resultado puede ser estadísticamente significativo pero no importante científicamente[4]. La selección del nivel de significación es ciertamente arbitraria, depende de qué tanto riesgo pueda tomarse para rechazar incorrectamente una hipótesis nula verdadera.

[4] Box, G, Hunter W., Hunter, S. "Estadística para investigadores". Apartado niveles de significación convencionales.

En la fig. 2.3 se muestra el nivel de significación del 5%, esto es, se rechazará la hipótesis nula cuando el valor muestral caiga dentro del intervalo de valores sobre el eje horizontal cubierto por el área sombreada.

Fig. 2.3 Distibución normal con 5% de significación



Ya que hemos descrito el error α , entonces sería razonable escoger un valor más pequeño a fin de tener un menor error, teniendo en cuenta que la selección es arbitraria. Sin embargo, como veremos más adelante, conforme disminuye α , aumenta otro riesgo, el de aceptar una hipótesis nula falsa. Este error, la de no rechazar una hipótesis nula falsa se denomina error de tipo II, y se representa convencionalmente con la letra griega beta β,

La interpretación de las decisiones respecto de los errores que se cometen, se puede resumir en la siguiente tabla.

DECISIÓN	TIPO DE ERROR	PROBABILIDAD
Rechazar H_0 cuando es verdadera	I	α
No rechazar H_0 cuando es falsa	II	β

Vamos a ilustrar a continuación, la relación inversa entre los dos tipos de errores. Para el efecto consideremos las dos hipótesis siguientes:

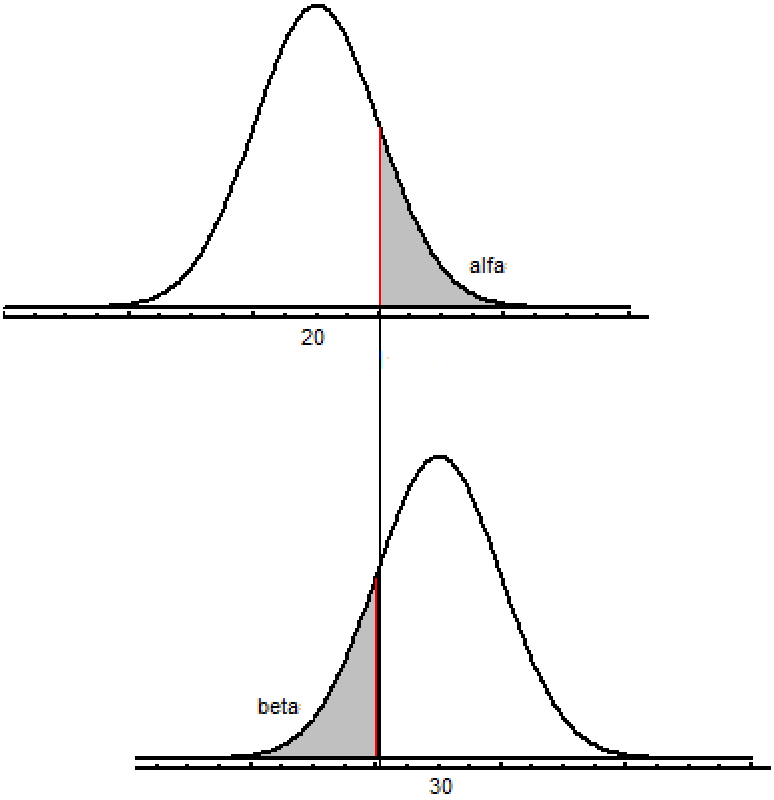
$$H_0: \mu = 20$$

Y

$$H_1: \mu = 30$$

Con un nivel de significación α igual al error de tipo I, o de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera.

Fig. 2.4 Relación entre alfa y beta



En la fig. 2.4 se muestran las áreas representando α y β. Observe que, cuando α disminuye, la recta vertical se traslada hacia la derecha, aumentando el área que representa a β. Por otro lado, cuando la recta vertical se traslada hacia la izquierda, α aumenta conforme β disminuye. Asi mismo, α está comprendido solamente cuando la hipótesis nula es verdadera($\mu = 20$) y β está comprendida solo cuando la hipótesis alternativae es verdadera $\mu = 30$.

Paso 4, LA REGLA DE DECISIÓN

Es importante antes de realizar la toma de muestra para determinar los valores pertinentes, plantear la regla de decisión. Son los términos de referencia de una prueba de hipótesis. Es tan importante como el nivel de significación, dado que consta de tres situaciones relevantes en la prueba; el estadístico de prueba, el valor crítico y la región crítica

El estadístico de prueba, es un valor que sirve para tomar la decisión de rechazar o no rechazar la hipótesis nula. Este valor del estadístico de prueba, puede ser el valor que proporciona la muestra o el mismo valor de Z correspondiente.

El valor crítico, es aquel valor que divide el conjunto de valores del estadístico de prueba en dos regiones gráficas, la región de rechazo, denominado también como región crítica y la región de no rechazo. Así mismo, **la región crítica,** es el conjunto de valores para el estadístico de prueba que llevará a rechazar la hipótesis nula.

El valor crítico, es el primer valor de la región crítica, y está determinado por el nivel de significación α.

Planteamos a manera de ilustración dos hipótesis en contraste, referente al peso promedio de frascos de mermelada elaborada por una empresa local,

$$H_0: \mu = 450\ ml$$

$$y$$

$$H_1: \mu < 450\ ml$$

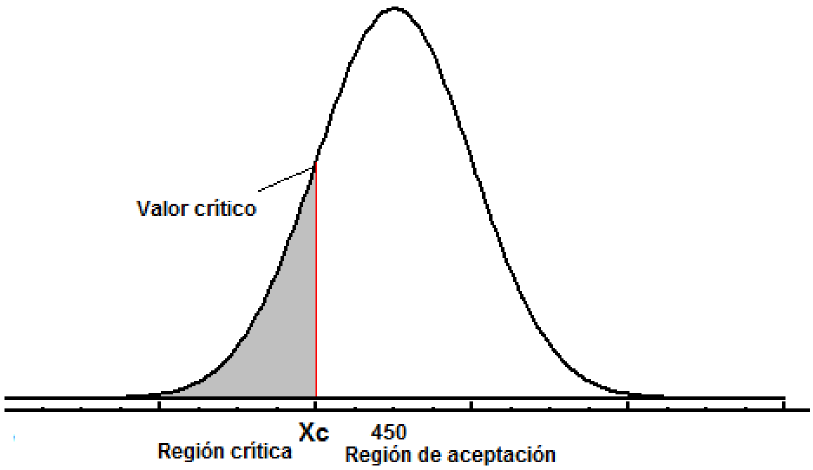
La región crítica es el conjunto de valores suficientemente bajos como para producir el rechazo de la hipótesis nula. Tienen que ser valores pequeños, debido a que el rechazo de la hipótesis nula significa la aceptación de la hipótesis alternativa, que indica valores menores al promedio ideal. En este caso, la regla de decisión se plantea como:

Rechazar H_0 si $\bar{X}_m \leq \bar{X}_c$

En la fig. 2.5 se muestra el valor crítico, la región crítica y la región de no rechazo. También puede emplearse el valor de z como estadístico de prueba, este valor se toma de la tabla normal estándar, del anexo *A*. Por ejemplo, si alfa α = 0.05, el valor crítico de *z* es igual a -1.645. Entonces para probar la hipótesis planteada, la regla de decisión es:

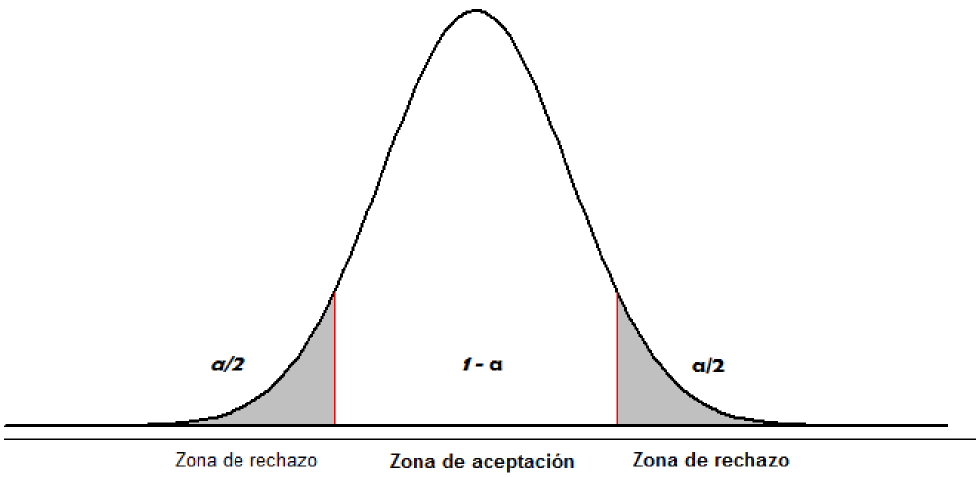
Rechazar H_0 si $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha$

Fig.2.5 Valor crítico, región crítica y zona de no rechazo



Así mismo, es oportuno manifestar que la zona de rechazo o región crítica depende de la suposición de la hipótesis alternativa. Así, si la hipótesis alternativa declara que el parámetro bajo estudio es diferente $(\mu \neq \mu_A)$, tendremos una prueba de dos colas. Si la hipótesis alternativa proporciona alguna direccionalidad de los parámetros, es decir, es mayor o menor que un valor supuesto $(\mu < \mu_A \quad o \quad \mu > \mu_A)$, la prueba es de una cola. La ilustración de lo mencionado se puede observar en la fig. 2.6, 2.7 y 2.8

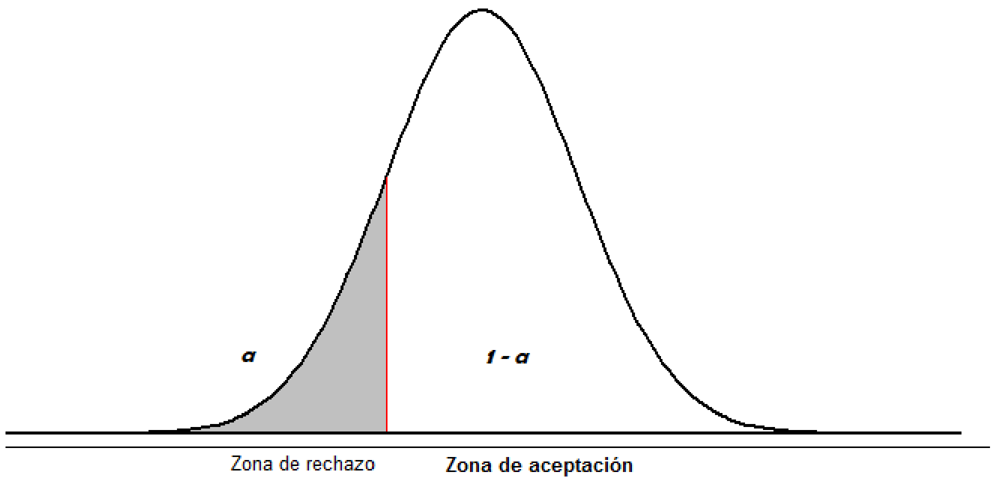
Fig. 2.6 Prueba de dos colas región de rechazo y aceptación



En la fig. 2.6, que representa una prueba de dos colas, la región crítica viene a ser la unión de dos conjuntos de valores, valores grandes y valores pequeños. En este caso un valor suficientemente grande como un valor suficientemente pequeño del estadístico de prueba provocará el rechazo de la hipótesis nula y se enuncia de la siguiente manera:

Se rechazará H_0, si el estadístico muestral es mayor que el valor crítico especificado o el estadístico muestral es menor que un valor crítico especificado.

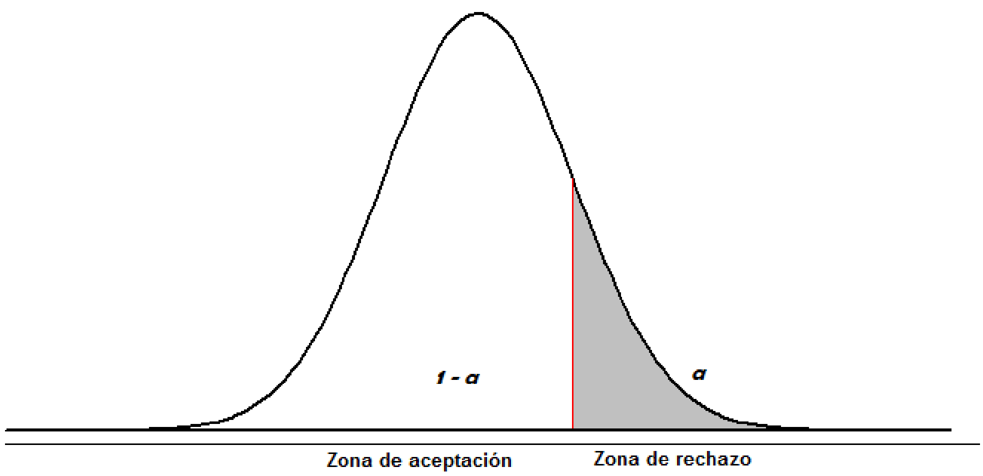
Fig. 2.7 Prueba de una cola región de rechazo y aceptación



Si la prueba es de una cola a la izquierda, tal como en la fig. 2.7, la regla se enuncia así:

Se rechazará H_0, si el estadístico de prueba de la muestra es menor que un valor crítico especificado.

Fig. 2.8 Prueba unilateral a la derecha región de rechazo y aceptación



Si la prueba es de una cola hacia la derecha, como se observa en la fig. 2.8, la regla de decisión se enuncia de la siguiente manera:

Rechazar H_o, si el estadístico de prueba de la muestra es mayor que un valor particular especificado

Paso 5, TOMA DE DECISIONES

Finalmente planteado la regla de decisión, se calcula el valor del estadístico de prueba de la muestra y se compara con el valor especificado en la regla de decisión. En el ejemplo de los frascos de mermelada, ilustrado en la fig 2.5, si el valor de la muestra que se ha tomado para realizar la experiencia es menor que el valor crítico, se rechaza la hipótesis nula. Puede llegarse a la conclusión que los clientes de la empresa tienen razón para sus reclamos debido a que el peso promedio de los frascos son menores a los especificados. En consecuencia, es menester corregir el defecto. Por otro lado si el valor de la muestra es mayor que el valor crítico, no se rechazará H_0.

De la discusión anterior se puede determinar que existen cuatro posibles decisiones que se pueden tomar a raíz de los resultados:

1º Cuando la hipótesis nula es cierta y se acepta, la decisión es correcta. Por tanto la forma de medir esta decisión es $1-\alpha$.
2º Cuando la hipótesis nula es cierta y se rechaza, la decisión es incorrecta y se incurre en el error de tipo *I*, la que se mide mediante α.
3º Cuando la hipótesis nula es falsa y se acepta, la decisión es incorrecta, lo que nos lleva a cometer un error de tipo *II*, llamado β.
4º Cuando la hipótesis nula es falsa y se rechaza. Entonces, la decisión es correcta. Por lo tanto la probabilidad se mide mediante $1-\beta$.

2.2.1 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA

Cuando se emprende la tarea de probar la media de una población, si el tamaño de la muestra es mayor que 30, se recurre a la distribución normal en concordancia con el teorema del límite central. Así mismo, aún si la muestra es menor que 30, pero es conocida la varianza de la población, σ^2, puede suponerse que el patrón es normal.
Así mismo, se empleará una prueba de dos colas, cuando no se tiene evidencias claras de la tendencia de los resultados en la estimación de las medias.
Para calcular los valores críticos de la media muestral en la prueba, se emplea el valor de la media poblacional, μ_0, como punto de referencia. En consecuencia, estos valores críticos son:

$$\bar{x}_1 = \mu_0 - Z(\sigma_{\bar{x}})$$
$$\bar{x}_2 = \mu_0 + Z(\sigma_{\bar{x}})$$

Vamos a desarrollar algunos ejemplos, para ilustrar el procedimiento de las pruebas de hipótesis, con planteamiento de hipótesis exactas.
Ejemplo 2.2 Un auditor de una compañía privada desea probar el supuesto que la media de todas las cuentas por pagar de la compañía es de 50 mil dólares, para lo cual toma una muestra de 36 clientes y calcula su media muestral, igual a 45 mil

dólares, con una desviación estándar de 2500 dólares. Realizar la, prueba de hipótesis para la media con un nivel de significancia del 5%.

Las hipótesis en contraste son:

$$H_0 : \mu_0 = 50\ mil$$
$$H_1 : \mu_0 \neq 50\ mil$$

Nivel de significación:$\alpha = 0.05$

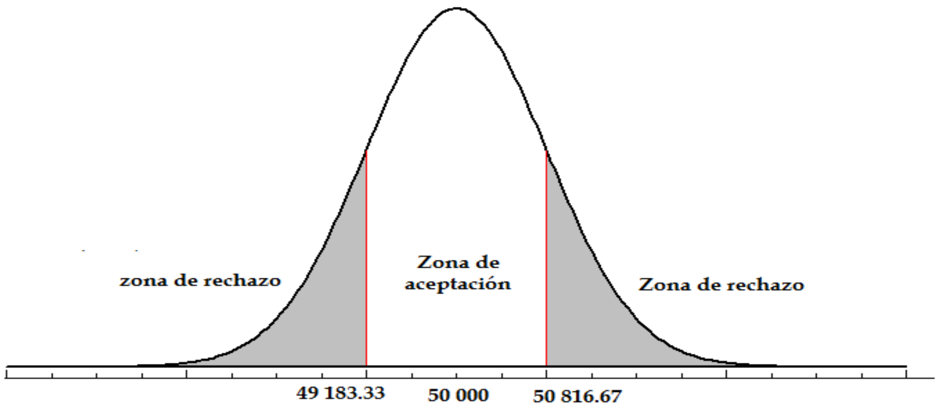
El estadístico, es decir, los valores críticos son:

$$\bar{x}_1 = \mu_0 - Z\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 50000 - 1.96\left(\frac{2500}{\sqrt{36}}\right) = 49183.33$$

$$\bar{x}_2 = \mu_0 + Z\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 50000 + 1.96\left(\frac{2500}{\sqrt{36}}\right) = 50816.67$$

Por tanto, la regla de decisión para rechazar o no rechazar la hipótesis nula queda planteado como:
Rechazar H_0 si la media muestral $\bar{X}_m$ es inferior a $49183.33us\$$ o mayor que $50816.67us\$$. En consecuencia existen dos regiones de rechazo, tal como se observa en la fig. 2.9

Fig. 2.9 Regla de decisión



Para calcular los valores críticos se usó los valores de $z = \pm 1.96$, puesto que para la distribución normal estándar tenemos, para un nivel de significación de 0.05, repartidos 0.025 a ambos lados de la curva, respectivamente.
A la luz de los resultados, se puede notar que la media muestral 45 mil dólares cae en la zona de rechazo del extremo izquierdo, puesto que es menor que 49183.33 dólares.
Por tanto, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa que $\mu \neq 50\ mil$

A continuación, ilustramos un tipo de prueba de hipótesis en la cual ambas hipótesis, nula y alternativa son exactas, lo cual permite calcular los dos tipos de errores tipo I y tipo II

Ejemplo 2.3 Suponga que los contenidos de azúcar en un frasco de mermelada se distribuyen normalmente con media 25 mg. y desviación estándar 8 mg. Se desarrolla un nuevo proceso de manufactura para disminuir el contenido de azúcar a 20 mg, siendo la desviación estándar la misma. Una muestra de 25 frascos producidos mediante el nuevo proceso proporciona una media de 23mg. Se rechazará la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa con nivel de significación igual al 5%?

Procedimiento
1º El patrón de distribución de la población es en forma normal
2º Las dos hipótesis en contraste son:

$$H_0: \mu = 25 \qquad y \qquad H_1: \mu = 20$$

3º El nivel de significación especificado es del 5% ó 0.05.
4º el valor crítico z para el nivel de significación es de -1.645, ya que por debajo de este valor se encuentra el 5% de los valores. El valor crítico z, aparece con signo negativo debido a que la región de rechazo se encuentra a la izquierda de la media 0. La hipótesis nula planteada sólo se rechazará si el estadístico de prueba muestral tiene un valor pequeño.
Entonces la regla de decisión se puede plantear como sigue:

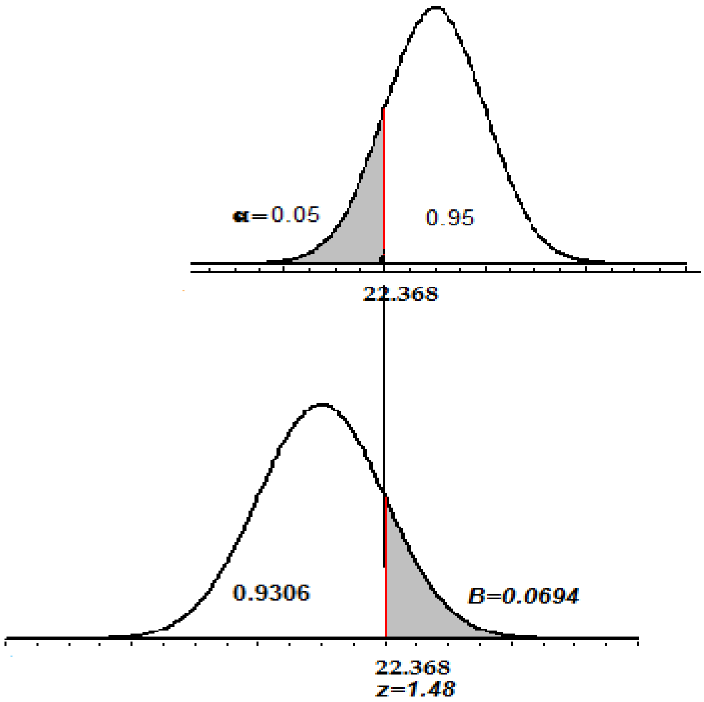
Rechazar H_0, siempre que Z calculado sea menor que -1.645. El valor de Z_c calculado se determina mediante la siguiente fórmula:

$$Z_c = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{23-25}{8/\sqrt{25}} = -1.25$$

Al comparar el valor de Z calculado, éste resulta ser mayor que el valor crítico –1.645, cayendo en la zona de no rechazo. En consecuencia no se rechaza la hipótesis nula.

Ejemplo 2.4 Referente al problema planteado en el ejemplo 2.3, ¿Cuál es la probabilidad de cometer un error de tipo II?
Como se ha explicado, el valor de β, es la probabilidad de aceptar la hipótesis nula, cuando ésta es falsa o cuando la hipótesis alternativa es verdadera, la regla se puede enunciar como sigue:

Fig. 2.10 Distribución de medias mostrando alfa y beta



Rechazar H_0 si $Z \leq -1.645$, de manera análoga puede plantearse:

Aceptar H_1 si $Z > -1.645$

Para obtener el valor de β, es conveniente realizar la conversión del valor crítico de $z = -1.645$ en unidades de $\bar{x}$ mediante:

$$\bar{X}_c = (z).\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) + \mu = (-1.645)\left(\frac{8}{\sqrt{25}}\right) + 25 = 22.368$$

Por tanto, en nuestro ejemplo, el valor crítico $\bar{X}$, es 22.368 que corresponde al $z = -1.645$. Entonces el valor de β, es la probabilidad de que exceda a 22.368, dado una media de 20, lo que se observa en la segunda parte de la fig. 2.10. y se plantea como:

$$\beta = P(\bar{X} > 22.368 \mid \mu = 20)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) > \frac{22.368-20}{\frac{8}{\sqrt{25}}})$$

$$= P(Z > 1.48) = 1 - P(Z < 1.48)$$
$$= 1 - 0.9306 = 0.0694$$

Lo cual está representado en la parte inferior de la fig. 2.10, por el área sombreada hacia la derecha.

A continuación, desarrollamos otro ejemplo similar al anterior, para que el lector pueda lograr una mayor comprensión del procedimiento.

Ejemplo 2.5 Una planta de manufactura produce baterías de celulares. Se conoce que la duración de estas baterías se distribuye en forma normal con media de 144 horas y desviación estándar 12 horas. Se instala un nuevo proceso de producción de las baterías y se espera que las baterías tengan una duración promedio, con el nuevo proceso, de 155 horas. Si se selecciona una muestra de 36 baterías obtenidas mediante el nuevo proceso y se obtiene una media de 150 horas.
a) ¿Qué decisión debería tomar, si el nivel de significación es del 1%?
b) ¿Cuál es la probabilidad de cometer un error de tipo II?

Procedimiento:

a) ¿Qué decisión debería tomar, si el nivel de significación es del 1%?

1º El patrón de distribución de la población es normal
2º Las dos hipótesis en contraste son:

$H_0: \mu = 144 \qquad y \qquad H_1: \mu = 155$

3º El valor del nivel de significación especificado es 0.01
4º Para un valor de $\alpha = 0.01$, el valor crítico de z es aquel que marca el 0.01 superior, de la distribución normal estándar. A partir de la tabla del anexo *A*, se determina el valor de $z = 2.33$. Este valor tiene signo positivo debido a que el valor del parámetro bajo la hipótesis alternativa es mayor que el valor bajo la hipótesis nula (fig 2.11). Por consiguiente, la regla de decisión es como sigue:

Rechazar H_0 si $Z \geq 2.33$

El estadístico de prueba muestral es:

$$Z = \frac{150-144}{\frac{12}{\sqrt{36}}} = 3.00$$

Lo que determina rechazar la hipótesis nula.

Si utilizáramos $\bar{X}$, como estadístico de prueba, se llega a la misma conclusión, como se muestra a continuación:

Rechazar H_0 si $\bar{X}_m > \bar{X}_c$

$$\bar{X}_c = z.\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) + \mu = 2.33\left(\frac{12}{\sqrt{36}}\right) + 144 = 148.66$$

Puesto que la media muestral es 150, que resulta mayor que el valor crítico de $\bar{X} = 148.66$, la decisión es la de rechazar H_0.

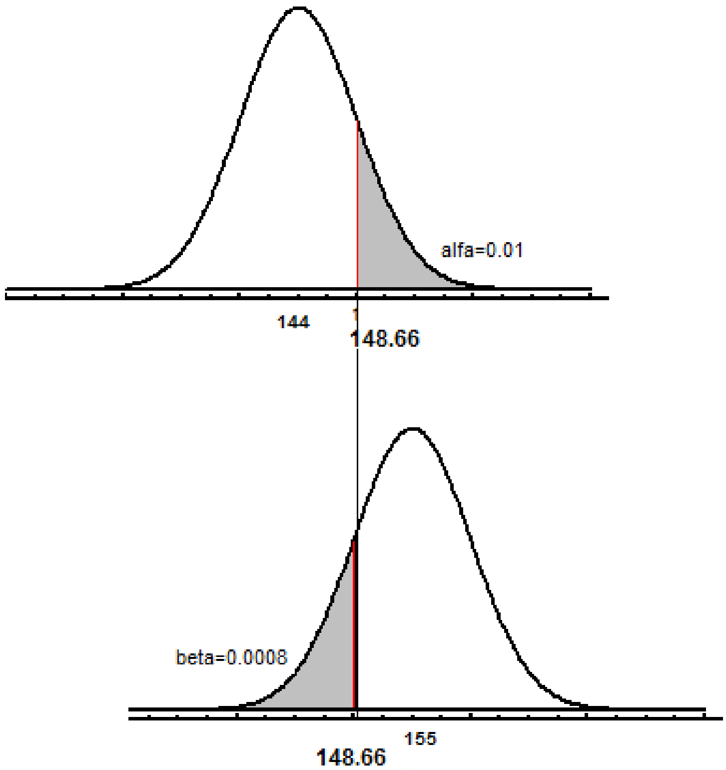
b) La probabilidad de cometer un error de tipo II es:

$$\beta = P(\bar{X}_c < 148.66 \ |\mu = 155) = P(Z < \frac{148.66-155}{\frac{12}{\sqrt{36}}})$$

$$= P(Z < -3.17) = P(Z > 3.17) = 1 - P(Z < 3.17) = 0.0008$$

En la fig. 2.11 se observa el área que representa beta(β). Para obtener el valor de β, es necesario y conveniente utilizar $\bar{X}$, como estadístico de prueba. Sin embargo, para la prueba de hipótesis es más recomendable emplear a z como estadístico de prueba.

Fig. 2.11 Prueba de hipótesis zona de rechazo y aceptación



Puesto que los niveles de significación α, se asocian solamente con hipótesis nulas exactas, cualquier prueba de hipótesis deberá basarse en hipótesis nulas exactas, a fin de determinar el valor criticó. Sin embargo, en ocasiones la hipótesis nula se especifica como inexacta, es decir, $\mu \geq \mu_0$ *o* $\mu \leq \mu_0$, en tales situaciones, es preferible ignorar este hecho, dado que éste no altera los resultados.
Es oportuno agregar, que para determinar β, sólo se podrá hacer si la hipótesis nula es exacta.

2.2.2 PRUEBAS DE HIPÓTESIS PARA PROPORCIONES

En este caso, la prueba puede plantear para su solución dos procedimientos; el primero, cuando se supone que la distribución de los datos sigue una distribución binomial y la segunda, cuando se aproxima empleando la distribución normal.

Prueba de hipótesis para una proporción poblacional empleando la distribución normal.

Es frecuente, que una prueba para proporciones poblacionales basados en una distribución binomial, sea de una sola cola. Dado un valor hipotético de la proporción poblacional, la región crítica está conformada por el conjunto de observaciones de muestra, que se desvían del valor hipotético
Para realizar pruebas de hipótesis con respecto a una proporción de la población resulta ciertamente conveniente utilizar la variable aleatoria normal X, puesto que en las tablas de distribución binomial se proporcionan solamente unos cuantos valores para n. Para realizar pruebas de hipótesis para cualquier valor de n puede emplearse el método de la aproximación normal siempre que n sea estadísticamente grande como para dar un valor de np y $n(1-p)$ mayores a 5. En esta situación, la variable aleatoria binomial se distribuye en forma aproximadamente normal con media np y varianza $np(1-p)$. Seguidamente ilustramos el procedimiento de aproximación normal para realizar pruebas para una proporción de la población.

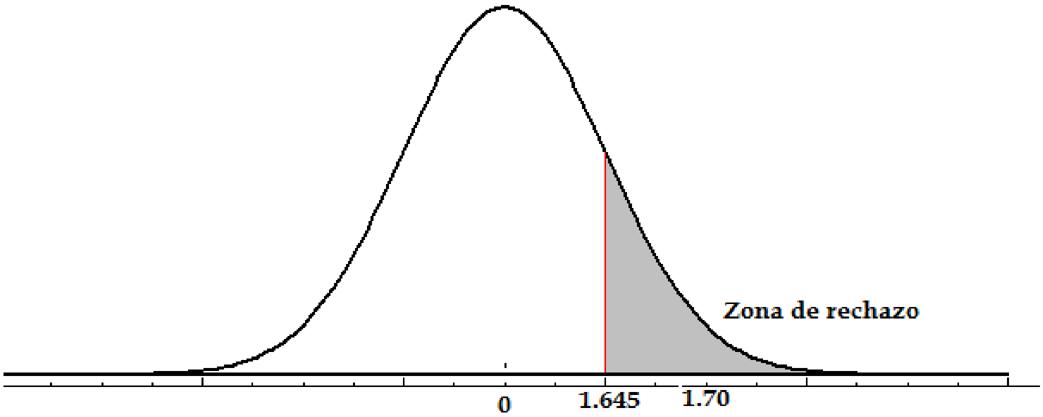
Ejemplo 2.6 suponga que cierto programa de televisión nacional tiene una preferencia del 50% de los televidentes que ven televisión en la hora que se emite la programación. El conductor por razones desconocidas ha renunciado y en su lugar se contrata a un periodista joven. La gerencia comercial desea determinar si con la nueva conducción ha aumentado el porcentaje de televidentes que ven el programa. Para tal efecto, se realizó una encuesta telefónica, a 200 personas. Se llegó al resultado que 56% ven el programa. Probar la hipótesis de que el porcentaje de televidentes que ven el programa sigue igual, contra la alternativa que ha aumentado, empleando un nivel de significación del 5%

Las hipótesis en disputa son:

$H_0: p = 0.50$ $\qquad\qquad$ $H_1: p > 0.50$
$\alpha = 0.05$

El tamaño de muestra, $n = 200$ y probabilidad éxito, $p = 0.5$
En este caso se puede utilizar la aproximación normal, puesto que la muestra es grande. El valor crítico z para un nivel de significación del 5%, de la cola derecha es 1.645, conforme se observa en la figura 2.12

Fig. 2.12 Distribución normal y zona crítica



La regla de decisión dice: Se rechazará H_0 si $Z_c > 1.645$

La media de la distribución de X normal es: $np = 200(0.5) = 100$ y la desviación estándar de X es:

$$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200(0.5)(0.5)} = 7.071$$

Entonces el estadístico de prueba Z_c es:

$$Z_c = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{112 - 100}{7.071} = 1.70$$

Cuyo valor, según se puede apreciar, es mayor que 1.645. En consecuencia, se rechaza la hipótesis nula H_0 . En la fig 2.12 se muestra que el valor observado del estadístico de prueba cae en la región de rechazo. Puede afirmarse que existen evidencias para manifestar que la proporción de televidentes a aumentado.

Ejemplo 2.7 Una entidad financiera seleccionó al azar 400 clientes que tenían cuenta corriente, de los cuales 180 poseían también una cuenta de ahorros. La entidad estableció como meta estratégica que al menos el 50% de sus clientes con cuenta corriente tengan una cuenta de ahorros. ¿Puede afirmar el gerente de la entidad financiera que el banco ha logrado su meta, con un nivel de significación del 5%?

Las hipótesis en disputa se pueden plantear, considerando que la meta de la entidad es llegar al menos al 50%, por lo que la hipótesis alternativa debe ser menos de 50%, como se ve seguidamente:

$H_0: p \geq 0.5$ $\qquad\qquad$ $H_1: p < 0.5$

Como la muestra es grande puede utilizarse la aproximación normal a la binomial. El valor crítico de z es -1.645, con un nivel del 5% y la cola hacia el extremo izquierdo, como se muestra en la fig. 2.13

La media: $\mu = np = 400(0.5) = 200$

y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400(0.5)(0.5)} = 10$

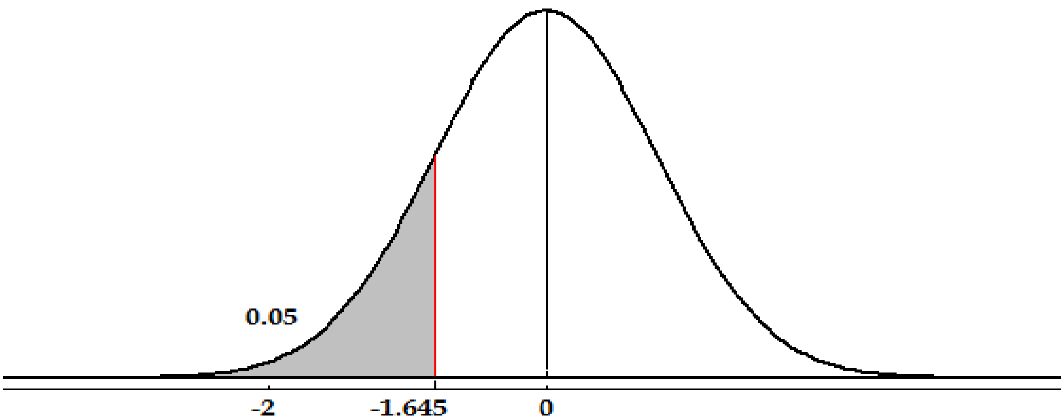
La regla de decisión es rechazar H_0 si $Z_c \leq -1.645$

Entonces el valor del estadístico muestral para la prueba de Z_c es.

$$Z_c = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{180 - 200}{10} = -2$$

que resulta menor que el valor crítico -1.645, por tanto la hipótesis nula se rechaza a favor de la hipótesis alternativa, que resulta menor a 50%
El gerente de la entidad financiera no queda satisfecho, debido a que las evidencias muestrales, no muestran que la proporción de clientes con cuenta corriente y que también posean cuenta de ahorro, haya aumentado significativamente para lograr la meta planeada, sino que sucedió lo contrario.

Fig. 2.13 Distribución normal y zona de rechazo



2.3 INTERVALOS DE CONFIANZA
Aunque los niveles de significación que se usan frecuentemente proporcionan una buena referencia, consideramos que es mejor indicar la probabilidad obtenida, en vez de sólo señalar si el resultado es significativo o no a un nivel de significación apropiado, en este caso es mejor dar un intervalo en el que se espera pudiera estar el parámetro
2.3.1 Intervalos de confianza para la media.
Ya se explicó que la hipótesis nula no siempre es la más importante para la toma de decisiones, sino, lo que se espera, es realizar estimaciones de los parámetros

mediante un valor puntual o mediante un intervalo, empleando para ello niveles de confianza convencionales, 90, 95 o 99%.
El procedimiento para determinar un intervalo de valores, el cual incluirá al verdadero valor de un parámetro de la población con una probabilidad de $1-\alpha$, se denomina intervalo de confianza. El símbolo de α, empleado, está referido a la probabilidad de que el intervalo de confianza que se determina, no incluya al verdadero valor del parámetro, es decir es un riesgo igual a α. Del mismo modo, este símbolo, α, también puede definirse como la probabilidad de cometer un error en la estimación.
El modelo general de un intervalo de confianza para la media (fig 2.14) es:

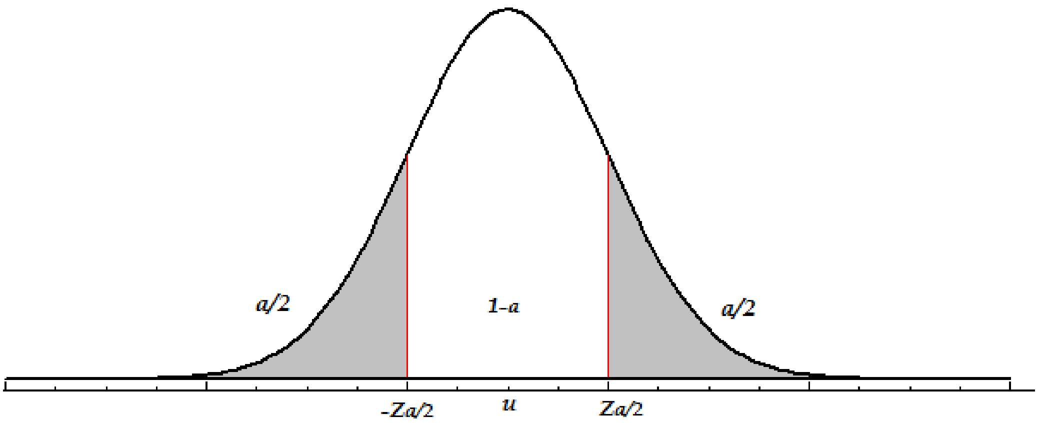
L_i: límite inferior= $\bar{X} - Z_o(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

L_s: límite superior= $\bar{X} + Z_o(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Entonces el intervalo queda definido como:

$$P(\bar{X} - Z_o(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \boldsymbol{\mu} \leq \bar{X} + Z_o(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})) = 100(1-\alpha) \qquad \text{ec. 2.1}$$

Fig. 2.14 Intervalo de confianza



Ejemplo 2.8 Suponga que se desea estimar los ingresos mensuales verdaderos de trabajadores agrícolas en una región del país. Para tal fin se escoge un grupo de 50 trabajadores con una media de ingresos de 3 mil dólares, con una desviación estándar de 250 dólares. Estimar el ingreso de todos los trabajadores de la región empleando un intervalo de confianza del 90%

Solución:

$$\bar{X} = 3000 \qquad S = 250 \qquad Z_0 = 1.645$$

Remplazando los datos en el modelo de intervalo, tenemos:

$$P(3000 - 1.645\left(\frac{250}{\sqrt{50}}\right) \leq \mu \leq 3000 + 1.645\left(\frac{250}{\sqrt{50}}\right)) = 0.90$$

$$P(2941.84 \leq \mu \leq 3058.16) = 0.90$$

Con una confianza del 90% se tendrá la certeza de que el verdadero promedio de ingreso de los trabajadores está comprendido entre 2 941.84us\$ y 3 058.16 us\$. Dólares, Y sólo en un 10% se puede esperar que la media no se encuentre en ese intervalo

Si el deseo es aumentar la confianza en la estimación, es decir, a una confianza del 95%, se cambia el valor de $z = 1.96$ en el modelo y se calcula

$$P(3000 - 1.96\left(\frac{250}{\sqrt{50}}\right) \leq \mu \leq 3000 + 1.96\left(\frac{250}{\sqrt{50}}\right)) = 0.95$$

$$P(2930.70 \leq \mu \leq 3069.30) = 0.95$$

Ejemplo 2.9 Denotemos por X el C.I. de los estudiantes universitarios del sur del Perú. Se conoce por estudios anteriores que la varianza de X es de 100. Se recoge una muestra de 36 alumnos universitarios y resulta un promedio de 110. Considerando que X es una variable aleatoria que se distribuye en forma normal, construir un intervalo de confianza del 95% para la media de todos los alumnos de la región(μ).

Los datos son:

$\sigma = 10$ $\quad Z_{\alpha/2} = 1.96$ $\quad n = 36$, según el modelo del intervalo de confianza del 95%, basado en una media de 110, es:

$$110 - 1.96.\frac{10}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 110 + 1.96.\frac{10}{\sqrt{36}}$$

$$106.73 \leq \mu \leq 113.27$$

Entonces el intervalo que va desde 106.73 hasta 113.27, incluirá a la media verdadera μ, con una probabilidad del 95%.

2.3.2 Intervalo de confianza para diferencia de medias

El procedimiento para construir un intervalo de confianza para la diferencia entre dos medias muestrales de una población, por ejemplo, μ_1 y μ_2, es similar a la de una muestra. Con la diferencia que en este caso la variable es, $\bar{d}$, que representa la diferencia positiva entre $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$, y cuyo error estándar de la diferencia es:

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad \text{ec. 2.2}$$

En la cual $\sigma_1^2 \; y \; \sigma_2^2$ son las dos varianzas de la población y n_1 y n_2 los tamaños de las dos muestras extraídas las que proporcionan las medias $\bar{X}_1 \, y \, \bar{X}_2$, respectivamente. En consecuencia, el intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para la verdadera diferencia δ entre las dos medias de la población se expresa de acuerdo a la ecuación 2.3

$$P\left(\bar{d} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \delta < \bar{d} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = (1-\alpha)100\% \qquad \text{ec. 2.3}$$

Ejemplo 2.10 Se desea estimar la verdadera diferencia en el rendimiento de dos variedades de aceituna de mesa en la región Tacna. Se obtuvieron los datos siguientes:

	Variedad 1	Variedad 2
Tamaño de la muestra	15	15
Media muestral	8.0 Tn	10.5 Tn
Varianza de la población	1.8	1.5

Obtener el intervalo de confianza del 95% para la verdadera diferencia en el rendimiento de las aceitunas variedad 1 y variedad 2. El tamaño de las muestras se refiere al número de árboles evaluados.
De acuerdo a la ecuación 2.3, el intervalo de confianza se calcula de la siguiente manera:

$$P\left((8-10.5) - 1.96.\sqrt{\frac{1.8}{15} + \frac{1.5}{15}} < \delta < (8-10.5) + 1.96.\sqrt{\frac{1.8}{15} + \frac{1.5}{15}}\right) = 0.95$$

$$P(2.5 - 1.96(0.469) < \delta < 2.5 + 1.96(0.469) = 0.95$$

$$P(1.58076 < \delta < 3.41924) = 0.95$$

Por tanto, el intervalo con un 95% de confianza de la diferencia de medias entre las variedades 1 y variedad 2, de aceituna de mesa va desde 1.58076 Tn a 3.41924 Tn.

2.3.3 Estimación de la proporción poblacional

La estimación de la verdadera proporción poblacional se basa en la proporción de las muestras que lo simbolizamos mediante $\hat{p}$, la que resulta de hacer $\frac{X}{n}$, en la cual X es una variable aleatoria binomial que representa el número de éxitos en n

ensayos. Cuando el tamaño de la muestra n es estadísticamente grande, la variable X tendrá una distribución normal con media $\mu = np$, y desviación estándar $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Cuando la proporción de la población es desconocida, ésta debe estimarse mediante la proporción muestral $\hat{p}$. Entonces la desviación estándar de la variable aleatoria binomial X es:

$$S = \sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} \qquad \text{ec. 2.4}$$

De acuerdo con lo manifestado para un tamaño de muestra suficientemente grande, el intervalo de confianza con $(1-\alpha)100\%$ para la proporción verdadera es:

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{n}} - \mathrm{Z}_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{\mathrm{p}}(1-\hat{\mathrm{p}})}{\mathrm{n}}} < p < \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{n}} + \mathrm{Z}_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{\mathrm{p}}(1-\hat{\mathrm{p}})}{\mathrm{n}}}\right) = (1-\alpha)100\% \qquad \text{ec. 2.5}$$

ó

$$\mathrm{P}\left(\hat{\mathrm{p}} - \mathrm{Z}_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{\mathrm{p}}(1-\hat{\mathrm{p}})}{\mathrm{n}}} < p < \hat{\mathrm{p}} + \mathrm{Z}_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{\mathrm{p}}(1-\hat{\mathrm{p}})}{\mathrm{n}}}\right) = (1-\alpha)100\%$$

Ejemplo 2.11. Suponga que una empresa de mercadeo está interesada en estimar la proporción de clientes de un diario local de marca *A*. Seleccionan una muestra aleatoria de 100 lectores y 60 de ellos manifiestan que adquieren el diario *A*. Obtener un intervalo de confianza del 99% para la proporción verdadera p de lectores del diario A.

Solución:

La proporción muestral $\hat{p} = \frac{60}{100}$ $\quad Z_{\alpha/2} = 2.575 \quad 1 - \hat{p} = \frac{40}{100}$

Entonces, el intervalo de acuerdo a la ecuación 2.5 es:

$$\mathrm{P}\left(0.60 - 2.575.\sqrt{\frac{(0.60)(0.40)}{100}} < p < 0.60 + 2.575\sqrt{\frac{(0.60)(0.40)}{100}}\right) = 0.99$$

$$P(0.60 - 2.575(0.049) < p < 0.60 + 2.575(0.049)) = 0.99$$

$$\mathrm{P}(0.4738 < p < 0.7262) = 0.99$$

Por tanto, el intervalo con un 99% de confianza de la verdadera proporción de lectores del diario *A* está comprendido entre 47.38% y 72.62%..

2.4 Resultados e Interpretación

Una investigación culmina cuando se generan datos susceptibles de interpretaciones, es allí donde se nota la experiencia del investigador en el momento de interpretar los datos. La interpretación de los resultados de un experimento se erige como la fase más importante de la investigación, puesto que tiene aspectos teóricos basados en leyes de probabilidad. En la interpretación de los resultados, éstos se extrapolan a la población de donde se extrajo la muestra. Y deben hacerse en términos del problema o del caso que se está estudiando. Si se trata de estimar la media será en términos de los valores promedios, si son de diferencias de medias, se realiza la interpretación en los términos de las diferencia de las medias o de proporciones, etc. Esta proporciona, *per se*, la capacidad de análisis de cada investigador en el momento de describir escenarios, simulando cualquier tipo de experimento. El investigador debe ser capaz de describir intuitivamente escenarios con casos que se asemejen a los problemas que se plantean, aun cuando los resultados del experimento no ameritan muchas interpretaciones, es por eso que la interpretación de resultados de un experimento se constituye en un arte. Por ello no es raro, que dos investigadores puedan interpretar los resultados de diferente manera. De cualquier forma, el proceso de interpretación correcta de los resultados va a depender del estudio cuidadoso de los patrones de variación de los datos recogidos.

Los datos originados a partir de un experimento, debe reflejar el efecto de los tratamientos; así como, las causas conocidas y desconocidas. Se requiere de un estudio pormenorizado de los datos y un análisis apropiado para separar los efectos de los tratamientos de los efectos aleatorios, que sean de menor interés.

Como una estrategia de investigación, se propone que los patrones de los datos deben ser estudiados exhaustivamente a fin de descubrir aquellos datos que pueden introducir sesgos en los resultados de la investigación.

TÉRMINOS CLAVE

Método científico
Pruebas de hipótesis
Nivel de significación
Hipótesis nula
Hipótesis alternativa
Intervalos de confianza

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Explique con fundamento, la importancia de emplear el método científico en experimentos.
2. Defina los errores de tipo I y de tipo II

3. Definir con sus propias expresiones el significado de $\alpha\ y\ \beta$, explicar las relaciones entre ellas.

4. Explique e ilustre la región de rechazo y no rechazo en una prueba de hipótesis.

5. Explique los términos siguientes:
   Valor crítico
   Región crítica
   Prueba de dos colas
   Prueba de una cola

6. Si planteamos una prueba de hipótesis nula $H_0: \mu = 250$, las hipótesis alternativas para la media, pueden ser:

$$\mu > 250$$
$$\mu < 250$$
$$\mu \neq 250$$

7. En una fábrica de manufactura la producción promedio por hora de los trabajadores de planta es de 80 unidades. El Gerente de control de calidad de la fábrica afirma que, como resultado del programa de capacitación a que fueron sometidos los trabajadores, ha aumentado la productividad de ellos. Plantear las hipótesis nulas y alternativas adecuadas.

8. Dado las siguientes hipótesis, nula y alternativa. Plantear en todos los casos la regla de decisión.
   a) $H_0: \mu = \mu_0$ $\qquad H_1: \mu > \mu_0$

   b) $H_0: \mu = \mu_0$ $\qquad H_1: \mu \neq \mu_0$

   c) $H_0: \mu = \mu_0$ $\qquad H_1: \mu < \mu_0$

9. Cierto proceso de llenado de botellas de pisco está diseñado para dar como resultado botellas con un volumen de 1000 mililitros. Plantear las reglas de decisiones para cada uno de los siguientes casos:

a) El gerente de control de calidad desea determinar si el volumen de la botella el pisco ha disminuido.
b) El gerente desea determinar si el volumen de la botella el pisco ha aumentado.

c) El gerente desea determinar si el volumen de la botella del producto ha cambiado.

10. El gerente de una empresa muy reputada, con denominación de origen en producción de Pisco, manifiesta que cumplen estrictamente con su característica de calidad en el llenado de envases que deben contener todos 1000 mililitros. Un inspector de la oficina de defensa del consumidor recibe algunas quejas, por lo que decide realizar un muestreo de 50 botellas de la producción y encuentra que el promedio de llenado de las botellas es de 970 ml, con una desviación estándar de 10. Con una confianza del

a) 90%, ¿el gerente de la empresa estará en lo correcto?
b) 95%, ¿el gerente de la empresa estará en lo correcto?
c) ¿Estará en lo cierto el gerente con una confianza del 99%?

11. Se conoce que cierta medicina para mascotas tiene un 80% de efectividad, esto significa que de cada 100 mascotas 80 se curan con la medicina. Se desea probar la efectividad de la medicina realizando una prueba de hipótesis con una confianza del 95%. Plantear las hipótesis y regla de decisión.

12. Un Ingeniero civil manifiesta que su método de construcción permite realizar desencofrados de columnas en sólo 96 horas. El servicio de construcciones del ministerio de vivienda recibe denuncias que algunas viviendas muestran ciertos resquebrajamientos en sus estructuras. Para verificar realiza un muestreo de 50 viviendas construidas por la empresa del citado ingeniero y encuentra que el promedio de columnas para desencofrados es de 110 horas, con una desviación estándar de 7 horas. Realizar una prueba de hipótesis y responder si ¿la autoridad de vivienda puede tener evidencias para sancionar al Ing constructor, con una confianza del 95%?

13. Una facultad de educación de una reconocida universidad desea estimar mediante intervalo de confianza el promedio verdadero de los coeficientes intelectuales (C.I) de sus alumnos, dentro de un programa de movilidad estudiantil. Se conoce que los C.I. se distribuye en forma normal con una desviación estándar de 10. Para dicho propósito se extrae una muestra de 36 estudiantes los mismos que proporcionan una media muestral de 108. Empleando una confianza del 99% para la media verdadera, μ, de los C.I. Construir un intervalo de confianza para la verdadera media de C.I.

14. Una empresa agroindustrial empaca harina de Papa en bolsas de papel. La empresa está interesada en estimar el verdadero peso de las bolsas con fines de calidad. Recoge una muestra de 25 bolsas con un peso medio de 48.9 kilogramos con una desviación estándar de 3.2. Construir un intervalo de confianza del

a) 90% para la verdadera media, μ,
b) 95% para la verdadera media, μ,

c) 99% para la verdadera media, μ,

15. En una fábrica de manufactura a fin de buscar la reducción del tiempo de ejecución de un cierto bien, se seleccionan dos grupos de trabajo que son entrenados mediante un método de capacitación. El tiempo de ejecución promedio de ambos grupos después del entrenamiento se presentan a continuación:

	Grupo I	Grupo II
$Tamaño\ de\ muestra$	$n_1 = 30$	$n_1 = 40$
$Media\ muestral\ (min)$	$\bar{X}_1 = 50$	$\bar{X}_2 = 60$
$Varianza$	$\sigma_1^2 = 81$	$\sigma_2^2 = 144$

Construir el intervalo de confianza del 93% para estimar la verdadera diferencia en la ejecución del bien.

16. Se realizó un experimento para estimar la duración promedio de la diferencia de vida útil de dos marcas de baterías para autos deportivos. La información se ha recogido en la tabla siguiente.

	Grupo I	Grupo II
$Tamaño\ de\ muestra$	$n_1 = 25$	$n_1 = 35$
$Duración\ media(horas)$	$\bar{X}_1 = 5000$	$\bar{X}_2 = 5500$
$Varianza$	$\sigma_1^2 = 400$	$\sigma_2^2 = 225$

Determínese el intervalo de confianza para la verdadera diferencia en la duración de la vida útil de las dos marcas de baterías para autos deportivos, empleando un nivel de confianza del 98%.

17. En un instituto superior del país se aplicó una prueba general a estudiantes según género. La prueba arrojó los siguientes resultados

	Hombres	Mujeres
$Tamaño\ de\ muestra$	$n_1 = 100$	$n_1 = 80$
$Puntuación\ promedio$	$\bar{X}_1 = 95$	$\bar{X}_2 = 90$
$Varianza$	$\sigma_1^2 = 36$	$\sigma_2^2 = 25$

Construir un intervalo de confianza para la diferencia entre las puntuaciones promedios de los estudiantes hombres y mujeres, con una confianza del:

a) 90%
b) 92%
c) 97%

18. Se desea determinar la proporción de estudiantes universitarios de provincias que realizan algún trabajo en los fines de semana. Para este fin,

se toma una muestra aleatoria de 150 estudiantes universitarios de los cuales 50 de ellos realiza algún trabajo en los fines de semana. Determinar el intervalo de confianza del 95% para *p,* verdadera proporción de estudiantes que realizan alguna labor en los fines de semana.

19. Se realizó una investigación al público televidente con el fin de averiguar la proporción de televidentes que ven programas de espectáculo. Se tomó una encuesta a 500 personas de los cuales 200 respondieron que ven programas de espectáculo. Determinar el intervalo de confianza del
a) 80% para *p* la verdadera proporción de público que ven programas de espectáculo.
b) 90% para *p* la verdadera proporción de público que ven programas de espectáculo.
c) 99% para *p* la verdadera proporción de público que ven programas de espectáculo.
20. En el año 2009 se realizó una encuesta en un país centroamericano para estimar la proporción de ciudadanos que están de acuerdo con la suscripción de los Tratados de Libre Comercio. Se entrevistó a 1200 ciudadanos de los cuales 480 respondieron afirmativamente. Determinar con un error del 5% la verdadera proporción de ciudadanos del país centroamericano que están de acuerdo con el Tratado de Libre Comercio, mediante un intervalo de confianza.

21. En una universidad de la capital del Perú, Una trabajadora afirma que por lo menos el 35% de las mujeres trabajan en jornada completa. Un funcionario del ministerio de trabajo desea verificar la afirmación de dicha trabajadora. Para dicho fin, selecciona una muestra en forma aleatoria de 100 trabajadoras, de los cuales 42 tienen jornada completa.
a) Tendrá el funcionario de trabajo evidencias suficientes para rechazar la afirmación de la trabajadora. para un nivel del 5%.
b) Estimar el intervalo de confianza del 99% para la proporción verdadera de todos los trabajadores de la universidad que tienen jornada completa.

CAPÍTULO III

COMPARACIÓN DE MEDIAS DE DOS TRATAMIENTOS

Antes de tratar experimentos complejos, en el presente capítulo, estudiaremos diferentes procedimientos para probar la significación entre las medias de dos muestras tomadas de dos poblaciones de datos numéricos, con el propósito de hacer inferencias con respecto a posibles diferencias en los parámetros de las dos poblaciones, como una extensión de las pruebas de hipótesis de una sola muestra. Con este fin, haremos uso de la distribución t a partir de dos poblaciones normales o que se distribuyen aproximadamente en forma normal y cuando el tamaño de la muestra n es pequeño, es decir, menos de 30.
Sin embargo, a fin de ilustrar el análisis de la investigación en forma clara, en este capítulo, analizaremos muestras independientes y dependientes. De modo que el lector al culminar este capítulo sea de capaz de:

-Conocer cuando y como utilizar la prueba de t, de varianzas conjuntas, para estudiar las posibles diferencias en los parámetros de dos poblaciones independientes.
-Conocer cuando y como utilizar la prueba F para estudiar las posibles diferencias entre las varianzas de dos poblaciones independientes y
-Conocer cuando y como utilizar la prueba de t, para estudiar posibles diferencias de medias, en dos poblaciones dependientes.

3.1 PRUEBAS PARA MUESTRAS INDEPENDIENTES

Todo investigador que está implicado en desarrollar pruebas de hipótesis, se enfrenta al dilema de qué criterio utilizar para probar un determinado proceso de investigación que nos conduzca a inferencias de poblaciones sobre la cual estamos interesados en estudiar.

Precisamente la estadística nos brinda un sinnúmero de instrumentos de los cuales debemos seleccionar el que esté más acorde a los resultados que deseamos obtener. Esto está relacionado con la complejidad de los métodos y sobre todo, a la disponibilidad de paquetes estadísticos que puedan garantizar resultados de calidad y reducción del tiempo en el análisis.

Para proceder al análisis de muestras independientes, vamos a desarrollar la prueba t de varianza conjuntas, que planteamos a continuación:

3.1.1 Prueba *t* de varianzas idénticas

Supongamos que se conocen dos poblaciones independientes, cada una con una media y una desviación estándar, que los representamos de la siguiente manera:

Tabla 3.1 Datos poblacionales

	Población 1	Población 2
Media	μ_1	μ_2
Desviación estándar	σ_1	σ_2

De ambas poblaciones se toman muestras aleatorias de tamaño n_1 y n_2,
El estadístico de prueba, en este caso, para determinar las diferencias entre las medias de las poblaciones, se basa en la diferencia de las medias muestrales, que viene representado como, $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$, De acuerdo al teorema central de límite, esta variable seguirá una distribución normal cuando el tamaño de n sea suficientemente grande. En consecuencia, la estadística de prueba Z es:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad ec. 3.1$$

Sin embargo, en la mayoría de los casos no se conoce la desviación estándar verdadera de ambas poblaciones, lo único a la mano y conocidos son las medias de las muestras $(\bar{X}_1\ y\ \bar{X}_2)$ y las desviaciones estándares $(S_1\ y\ S_2\ )$ que lo calculamos a partir de las muestras.
Así mismo, suponemos que las muestras fueron extraídas en forma aleatoria e independiente de las respectivas poblaciones, las mismas que se distribuyen en forma normal y considerando que las varianzas son idénticas. En esta consideración, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, se emplea la prueba t de varianzas idénticas a fin de probar si existen diferencias entre las medias de las poblaciones.

Para el planeamiento de las hipótesis en conveniente llevar a cabo pruebas de dos colas o de una, dependiendo del interés de probar si las dos medias son diferentes o si alguna de ellas es mejor que la otra, como se observa en la tabla 3.2. En la tabla mencionada, se plantean tres tipos de hipótesis, nula; la primera, el supuesto es que son iguales, prueba de dos colas; la segunda en la que la suposición se basa en que la media 1 es mayor o igual que la media 2, prueba de una cola; y la tercera una prueba de una cola, al extremo izquierdo, se plantea que la media 1 es menor o igual que la media 2. Para las tres hipótesis nula, se plantean las hipótesis alternativas que contrastan los anteriores y las mismas representan las hipótesis de trabajo.
En consideración a que las varianza son idénticas, entonces la varianza de las diferencias de las medias, es decir, la variable aleatoria $\bar{D}$, se define como:

Tabla 3.2 Planteamiento de las hipótesis

Prueba de dos colas	Prueba de una cola inferior	Prueba de una cola superior
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ $H_1: \mu_1 > \mu_2$

$$\sigma_{\overline{D}}^2 = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \qquad \text{ec. 3.2}$$

Como se ha manifestado líneas arriba, el valor de $\sigma_{\overline{D}}^2$ es necesario estimarlo mediante $S_{\overline{D}}^2$, la varianza estimada de la diferencia de medias muestrales. En atención a esta proposición, se tiene que:

$$S_{\overline{D}}^2 = S_c^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \qquad \text{ec. 3.3}$$

En la que S_c^2 se obtiene mezclando los datos de las dos varianzas muestrales, a fin de tener una mejor estimación de la varianza poblacional de las diferencias de medias. Por tanto, la varianza conjunta se determina mediante:

$$\mathrm{S_c^2} = \frac{(\mathrm{n_1} - 1)\mathrm{S_1^2} + (\mathrm{n_2} - 1)\mathrm{S_2^2}}{(\mathrm{n_1} + \mathrm{n_2} - 2)} \qquad \text{ec. 3.4}$$

Y el error típico de la diferencia entre dos medias muestrales queda definido como:

$$S_{\overline{D}} = \sqrt{\frac{(\mathrm{n_1} - 1)\mathrm{S_1^2} + (\mathrm{n_2} - 1)\mathrm{S_2^2}}{(\mathrm{n_1} + \mathrm{n_2} - 2)}\left(\frac{1}{\mathrm{n_1}} + \frac{1}{\mathrm{n_2}}\right)} \qquad \text{ec. 3.5}$$

De acuerdo a esta ecuación, el valor del estadístico de prueba T para probar las hipótesis acerca de la diferencia entre dos medias poblacionales es:

$$\mathrm{T} = \frac{(\overline{\mathrm{X}}_1 - \overline{\mathrm{X}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(\mathrm{n_1} - 1)\mathrm{S_1^2} + (\mathrm{n_2} - 1)\mathrm{S_2^2}}{(\mathrm{n_1} + \mathrm{n_2} - 2)}\left(\frac{1}{\mathrm{n_1}} + \frac{1}{\mathrm{n_2}}\right)}} \qquad \text{ec. 3.6}$$

La que se debe comparar con el valor crítico *t,* para un nivel de significancia α y $(n_1 + n_2 - 2)$ grados de libertad.

En la ecuación 3.6, los valores son:

$\bar{X}_1$: *media de muestra de la población* 1
$\bar{X}_2$: *media de muestra de la población* 2
μ_1: *media de la población* 1
μ_2: *media de la población* 2
n_1: *tamaño de la muestra* 1
n_2: *Tamaño de la muestra* 2
S_1^2: *Varianza muestral de la población* 1
S_2^2: *varianza muestral de la población* 2

Se rechazará la hipótesis nula a un nivel de significación α si la estadística de prueba T es mayor que el valor crítico del extremo superior de la distribución de t o si la estadística de prueba T es menor que el valor crítico del extremo inferior de la distribución de t. La regla de decisión se plantea como:

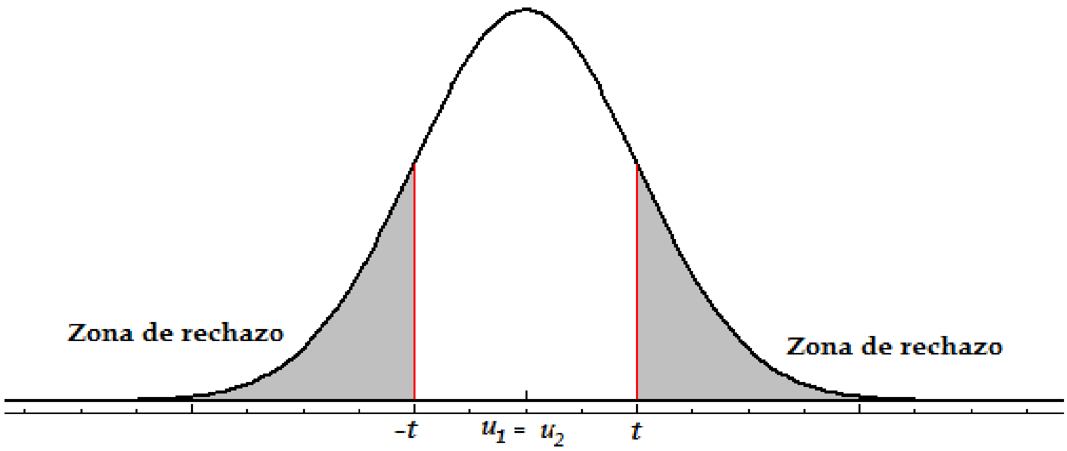
Rechazar *H₀* si $T > t_{(n_1+n_2-2)}$ o si $T < -t_{(n_1+n_2-2)}$

y se ilustra en la fig. 3.1

Ejemplo 3.1 Suponga que en un experimento sobre el rendimiento de tomates de una variedad de exportación que se lleva a cabo en dos ciudades diferentes, Los registros de la cosecha, en toneladas, se presentan en la tabla siguiente:

C1	45	42	50	46	58	52	43	60	56
C2	40	42	55	50	45	43	48	40	39

Fig. 3.1 Prueba de dos colas y zonas de rechazo



Para iniciar el experimento se plantean las hipótesis a fin de probar si existen diferencias en los registros de la variedad de tomate en ambas ciudades.

H₀: $\mu_1 = \mu_2$

H₁: $\mu_1 \neq \mu_2$

Suponemos que las muestras son tomadas de poblaciones normales con varianzas iguales, por tanto, recurrimos a la prueba t de varianzas idénticas y nivel de significación $\alpha = 0.05$ y $9 + 9 - 2 = 16$ grados de libertad ($t_{(0.05,16)}$)
En consecuencia la regla de decisión es:

Rechazar H_0 si $T > t_{16} = 2.1199$ o si $T < t_{16} = -2.1199$, en cualquier otro caso no se rechaza la hipótesis nula.

Resumen Estadístico proporcionado por Statgraphics

	ciudad 1	ciudad 2
Frecuencia	9	9
Media	50,2222	44,6667
Varianza	44,6944	29,0
Desviación típica	6,68539	5,38516
Mínimo	42,0	39,0
Máximo	60,0	55,0
Rango	18,0	16,0
Asimetría tipi.	0,298763	1,11334
Curtosis tipificada	-0,970195	0,00369275

Para nuestro ejemplo empleamos la ecuación

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

En donde la varianza conjunta S_C^2 es:

$$S_c^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

Reemplazando los valores de la tabla resumen estadístico, se tiene:

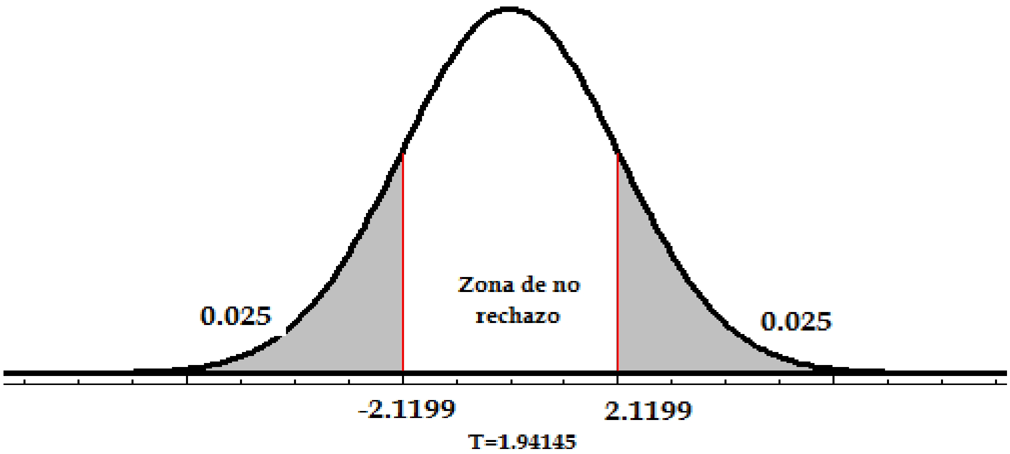
$$= \frac{8(44.6944) + 8(29.0)}{16} = 36.8472$$

Por tanto el valor de T calculado mediante la ecuación respectiva es:

$$T = \frac{50.2222 - 44.6667}{\sqrt{36.8472\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right)}} = 1.94145$$

Al nivel de significación del 5%, la hipótesis nula no se rechaza, debido a que $T = 1.94145$ es menor que $t = 2.1199$ y cae en la zona de no rechazo, fig 3.2.

Fig. 3.2 Prueba de dos colas con 5% de significación



La hipótesis nula no fue rechazada por que la estadística de prueba T ha caído en la zona de no rechazo. Por tanto, el investigador debe llegar a la conclusión que no existen evidencias suficientes de una diferencia en los rendimientos del tomate en dos ciudades distintas del país. Del mismo modo, el lector debe observar que en el presente experimento el tamaño de la muestra es igual en ambas ciudades, es decir, $n_1 = n_2$, por tanto la fórmula para la varianza conjunta o combinada se convierte en:

$$S_c^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2}{2}$$

Utilizando el paquete statgraphics y siguiendo la siguiente rutina, $Analizar \rightarrow datos\ continuos \rightarrow\ Comparación\ de\ dos\ muestras \rightarrow\ muestras\ independientes$, e ingresando los archivos del editor de datos, se llega a los siguientes resultados proporcionado por el paquete.

Comparación de Medias proporcionado por Statgrapics

95,0% intervalo de confianza para la media de ciudad 1: 50,2222 +/- 5,13886 [45,0834,55,3611].

95,0% intervalo de confianza para la media de ciudad 2: 44,6667 +/- 4,13941 [40,5273,48,8061].

95,0% intervalos de confianza para la diferencia de medias:

Suponiendo varianzas iguales: 5,55556 +/- 6,06616 [-0,5106 ; 11,6217]

Contrastes t de comparación de medias

Hipótesis nula: media1 = media2
Hipótesis alt.: media1 <> media2

Suponiendo varianzas iguales: t = 1,94147 P-Valor = 0,0700235

El StatAdvisor

Esta opción ejecuta el t-test para comparar las medias de las dos muestras. También establece los intervalos de confianza o los límites para cada media y para la diferencia entre las medias. De particular interés está el intervalo de confianza para la diferencia entre las medias, el cual se extiende desde -0,5106 hasta 11,6217. Dado que el intervalo contiene el valor 0.0, no existe diferencia estadísticamente significativa entre las medias de las dos muestras para un nivel de confianza del 95,0%.
También puede aplicarse un t-test para probar una hipótesis específica sobre la diferencia entre las medias de las poblaciones de las que proceden las dos muestras. En este caso, el test se ha realizado para determinar si la diferencia entre las dos medias es igual a 0,0 frente a la hipótesis alternativa en la que la diferencia no es igual 0,0. Puesto que el p-valor calculado no es inferior a 0,05, no podemos rechazar la hipótesis nula.

NOTA: estos resultados asumen la igualdad de varianzas en las dos muestras. En este caso, esa asunción parece ser razonable teniendo en cuenta los resultados del F-test para comparar las desviaciones típicas.

Ejemplo 3.2 En la región de Tacna, se llevó a cabo un experimento sobre la producción de Ají con fines de exportación. Un empresario, encargó a dos agricultores en sus respectivos predios para llevar a cabo el experimento, a quienes les proporcionó el material experimental e insumos agrícolas para ser conducidos en las mismas condiciones de humedad, abonamiento, y otros. El número de unidades experimentales cosechadas en ambos predios no son iguales. Los resultados obtenidos en ambos predios fueron los siguientes:

Tabla 3.3 Volumen de producción de ají
de exportación (Tn/ha)

Predio 1	Predio 2
12.5	12.5
14.2	13.4
15.5	11.2
10.2	10.8
11.9	15.3
15.2	9.9
10.7	8.9
12.0	15.1
13.7	13.4
9.8	10.8
11.0	14.3
	13.4
	12.4

El interés del empresario es probar si hay diferencia entre los rendimientos de la cosecha, conduciendo el experimento en distintos lugares.

Solución:

A fin de reducir el tiempo de análisis empleamos el paquete Statgraphics, para el análisis estadístico, cuyos resultados se presentan en la fig.3.3, que se observa a continuación

Fig. 3.3 Resultados por computadora empleando
el paquete Statgraphics

Resumen del Procedimiento

Muestra 1: predio 1
Muestra 2: predio 2

Muestra 1: 11 valores desde 9,8 hasta 15,5
Muestra 2: 13 valores desde 8,9 hasta 15,3

El StatAdvisor

Este procedimiento está diseñado para comparar dos muestras de datos. Calculará varios estadísticos y gráficos para cada muestra, y ejecutará varias pruebas para determinar si existen diferencias estadísticamente significativas entre las dos muestras.

Resumen Estadístico

	predio 1	predio 2
Frecuencia	11	13
Media	12,4273	12,4154
Varianza	3,92418	3,94808
Desviación típica	1,98095	1,98698
Mínimo	9,8	8,9
Máximo	15,5	15,3
Rango	5,7	6,4
Asimetría tipi.	0,436248	-0,308137
Curtosis típificada	-0,836755	-0,643285

El StatAdvisor

Esta tabla muestra el resumen estadístico para las dos muestras de datos. Pueden usarse otras opciones tabulares dentro de este análisis para probar si las diferencias entre las estadísticas de las dos muestras son estadísticamente significativas. De particular interés está la asimetría estandarizada y la curtosis estandarizada que puede usarse para determinar si las muestras proceden de distribuciones normales. Los valores de estos estadísticos fuera del rango de -2 a +2 indican salidas significativas de normalidad que tendería a invalidar las pruebas que comparan las desviaciones normales. En este caso, ambos valores de asimetría estandarizada están dentro del rango esperado. Ambos valores de curtosis estandarizada están dentro del rango esperado.

Comparación de Medias

95,0% intervalo de confianza para la media de predio 1: 12,4273 +/- 1,33083 [11,0964, 13,7581]
95,0% intervalo de confianza para la media de predio 2: 12,4154 +/- 1,20072 [11,2147, 13,6161]

95,0% intervalos de confianza para la diferencia de medias:
 suponiendo varianzas iguales: 0,0118881 +/- 1,68584 [-1,67395,1,69772]

contrastes t de comparación de medias

Hipótesis nula: media1 = media2
Hipótesis alt.: media1 <> media2
 suponiendo varianzas iguales: t = 0,0146245 P-Valor = 0,988464

El StatAdvisor

Esta opción ejecuta el t-test para comparar las medias de las dos muestras. También establece los intervalos de confianza o los límites para cada media y para la diferencia entre las medias. De particular interés está el intervalo de confianza para la diferencia entre las medias, el cual se extiende desde -1,67395 hasta 1,69772. Dado que el intervalo contiene el valor 0.0, no existe diferencia estadísticamente significativa entre las medias de las dos muestras para un nivel de confianza del 95,0%.

También puede aplicarse un t-test para probar una hipótesis específica sobre la diferencia entre las medias de las poblaciones de las que proceden las dos muestras. En este caso, el test se ha realizado para determinar si la diferencia entre las dos medias es igual a 0,0 frente a la hipótesis alternativa en la que la diferencia no es igual 0,0. Puesto que el p-valor calculado no es inferior a 0,05, no podemos rechazar la hipótesis nula.

NOTA: estos resultados asumen la igualdad de varianzas en las dos muestras. En este caso, esa asunción parece ser razonable teniendo en cuenta los resultados del F-test para comparar las desviaciones típicas

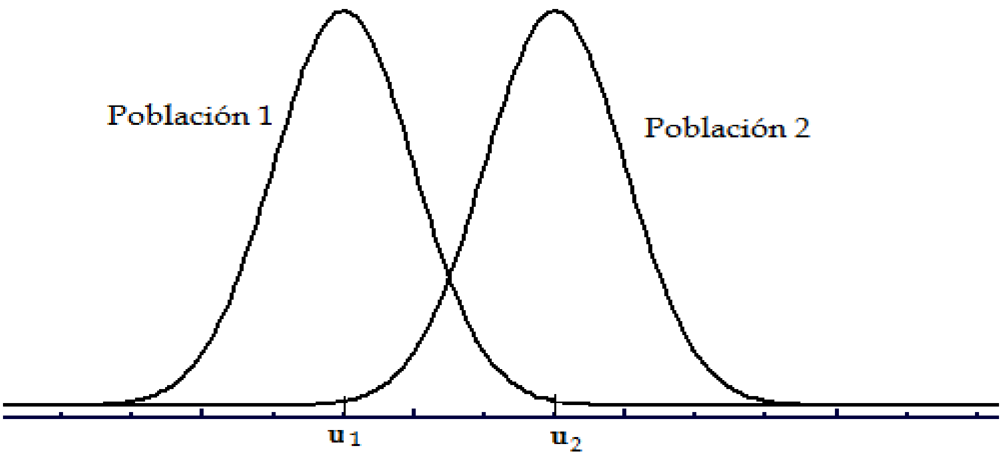
3.1.2 Prueba de Varianzas Diferentes

En la fig. 3.4 se ilustra la prueba *t* de varianza idénticas, en donde se observa que se asumen medias diferentes y varianza iguales. En esta ocasión, si bien asumimos que las poblaciones se distribuyen en forma normal, sin embargo, negamos la posibilidad de que las dos varianzas son iguales. Por esta razón, la prueba de varianzas iguales resulta inapropiada, por lo que vamos a hacer uso de la prueba *t* de varianza separadas

El método consiste en lo siguiente:

Planteamos las dos hipótesis, la hipótesis nula, de no diferencias en las medias de dos poblaciones independientes Vs la hipótesis alternativa de que las dos medias son diferentes.

Fig. 3.4 Distribución de la prueba t de varianzas iguales



$\mu_2 > \mu_1 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_0: $\mu_1 = \mu_2$, $\left(las\ medias\ son\ iguales \right)$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ $\left(las\ medias\ son\ diferentes \right)$

El estadístico de prueba para varianzas diferentes es:

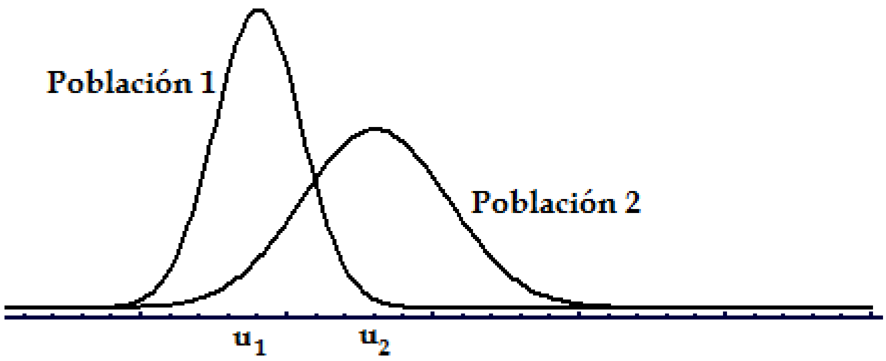
$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad \text{ec. 3.7}$$

En la fig. 3.5, se ilustra la prueba t de varianzas distintas en la cual la media de la muestra 2 es mayor que la media de la muestra 1, del mismo modo la varianza de la muestra 2 es mayor que la varianza de la muestra 1

La estadística que se presenta en la ec. 3.7, sigue una distribución t de student, con grados de libertad ν, la misma que proviene del siguiente cálculo, empleando la ecuación 3.8.

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$ ec. 3.8

Fig. 3.5 Distribución de la pruieba t de varianzas diferentes



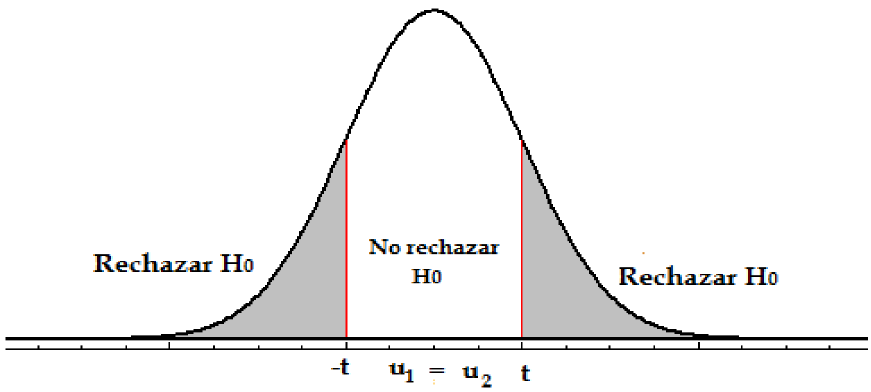
$\mu_1 < \mu_2$ $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$

La regla de decisión de la prueba de hipótesis para un nivel de significación α permite rechazar la hipótesis nula si la estadística de prueba T calculada es mayor que el valor crítico de t por el extremo superior de la distribución de t, o si la estadística de prueba es menor que el valor crítico del extremo inferior de la distribución de t. Es decir, la regla de decisión se puede enunciar como:

$-Rechazar\ H_0\ si\ T > t_v$ o
-$Rechazar\ H_0\ si\ T < -t_v$
-En cualquier otro caso no se rechaza H_0

En la fig. 3.6 se presenta la regla de decisión

Fig. 3.6 Regla de decisión y prueba de dos extremos



La aplicación de este método podemos mostrar, refiriéndonos al problema presentado en el ejemplo 3.2, de volumen de producción de ají. Haciendo alusión al citado ejemplo, el empresario desea determinar si existe cualquier diferencia en el rendimiento por hectárea de las dos parcelas que se han usado para llevar a cabo el experimento. A fin de comparar las diferencias en el rendimiento de las dos parcelas, las hipótesis nula y alternativa son:

H₀: $\mu_1 = \mu_2$ o $\mu_1 - \mu_2 = 0$

H₁: $\mu_1 \neq \mu_2$ o $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Los rendimientos de la cosecha de ají de exportación, en ambos predios considerados en el experimento, se muestran en la tabla 3.3, así como el resumen de los resultados en la tabla 3.4.

Partimos siempre del supuesto, que las muestras fueron extraídas de poblaciones distribuidas en forma normal o aproximadamente normal, que sin embargo sus varianzas son diferentes. Bajo este análisis, vamos a emplear la prueba t de varianzas independientes. Si para realizar la prueba se asigna un nivel de significación $\alpha = 0.05$, haciendo uso de la ecuación 3.7, la estadística T seguirá una distribución t de student con 21 grados de libertad, que resulta de la parte entera de los cálculos de v, mediante la ec. 3.8

$$v = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{(\frac{S_1^2}{n_1})^2}{n_1-1} + \frac{(\frac{S_2^2}{n_2})^2}{n_2-1}}$$

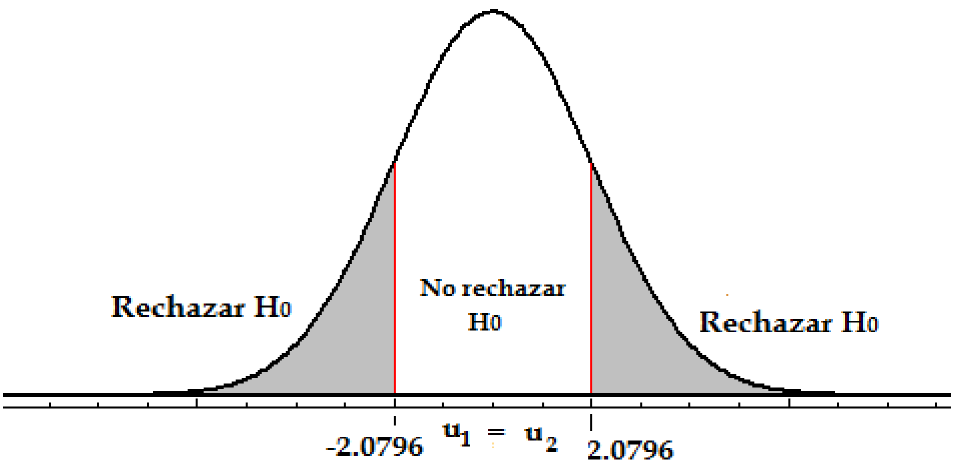
$$v = \frac{\left(\frac{3.92418}{11}+\frac{3.94808}{13}\right)^2}{\frac{(\frac{3.92418}{11})^2}{10}+\frac{\left(\frac{3.94808}{13}\right)^2}{12}} = \frac{0.43618}{\frac{0.12727}{10}+\frac{0.09223}{12}} = \frac{0.43618}{0.020413} = 21.36$$

Tabla 3.4 Resumen Estadístico

	predio 1	predio 2
Frecuencia	11	13
Media	12,4273	12,4154
Varianza	3,92418	3,94808
Desviación típica	1,98095	1,98698
Mínimo	9,8	8,9
Máximo	15,5	15,3
Rango	5,7	6,4
Asimetría tipi.	0,436248	-0,308137
Curtosis tipificada	-0,836755	-0,643285

Por tanto, los grados de libertad para el ejemplo, es 21. En la tabla *B* del anexo, el valor crítico de *t* con un nivel de significación del 5%, para una prueba de dos colas son respectivamente, 2.0796 y -2.0796

Fig. 3.7 Prueba de dos colas para experimento en ají



Utilizando la ecuación 3.7 y con datos de la tabla de resumen se calcula el valor de *T*

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{12.4273 - 12.4154}{\sqrt{\frac{3.92418}{11} + \frac{3.94808}{13}}}$$

$$T = \frac{0.0119}{0.8127} = 0.0146$$

Empleando el nivel del 5%, no se rechaza la hipótesis nula, puesto que $T = 0.0146 < 2.0795$. Significando que las diferencias halladas entre las dos medias de los predios agrícolas no es evidencia suficiente para afirmar que uno de ellos es mucho mejor en rendimiento que el otro. La estadística de prueba *T*, se encuentra en la zona de no rechazo, como se observa en la fig. 3.7

3.2 PRUEBA PARA MUESTRAS DEPENDIENTES

Esta técnica puede emplearse cuando se tiene alguna evidencia que las observaciones de muestras presentan alguna dependencia entre observaciones relacionadas o pareadas. Es decir, se trata de probar muestras cuyos valores tienen alguna dependencia, una de la otra.

Así mismo, la diferencia con las pruebas de muestras que se suponen independientes, radica en que, en este caso, la varianza de las diferencias de las medias muestrales no es igual a la suma de las varianzas muestrales. Para resolver el problema es conveniente y necesario desarrollar un nuevo procedimiento a fin de solucionar el caso de modo sostenible. La variable que se introduce para definir el planteamiento de la prueba es la diferencia entre pares de valores coincidentes, *D*, como se muestra en la tabla 3.5, llamada diferencia entre los valores pareados de las muestras, para posteriormente calcular la media y varianza de las diferencias.

Si hemos definido como *D*, la diferencia entre dos observaciones coincidentes, entonces la media de la *n* diferencias de las observaciones pareadas es:

$$\bar{D} = \frac{\sum \mathrm{D}}{\mathrm{n}} \qquad \text{ec. 3.9}$$

La varianza de la variable es:

$$\sigma_D^2 = \frac{\sum D^2}{n} - (\bar{D})^2 \qquad \text{ec. 3.10}$$

Por tanto el error estándar o desviación típica de D, que estima a σ_D, es:

$$S_D = \sqrt{\frac{\sigma_D^2}{n-1}} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{n-1}} \qquad \text{ec. 3.11}$$

Entonces el estadístico de la prueba queda definido como:

$$T = \frac{\bar{D}}{S_D} \qquad \text{ec. 3.12}$$

Tabla 3.5 Determinación de las diferencias entre dos muestras pareadas

Observación	Muestra 1	Muestra 2	Diferencia D
1	X_{11}	X_{21}	$D_1 = X_{11} - X_{21}$
2	X_{12}	X_{22}	$D_2 = X_{12} - X_{22}$
3	X_{13}	X_{23}	$D_3 = X_{13} - X_{23}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	X_{1n}	X_{2n}	$D_n = X_{1n} - X_{2n}$

Ejemplo 3.3 Se desea estudiar el aumento de peso en animales vacunos de carne, que fueron sometidos a una dieta enriquecida después de 45 días de su

aplicación. Fueron seleccionados aleatoriamente 15 animales y se registró el peso inicial (muestra 1), en kilogramos, y pasados los 45 días se registró su peso después del tratamiento(muestra 2), en kilogramos. Los datos se observan en la tabla 3.6. ¿Podría llegarse a la conclusión que el aumento de peso de los animales no es significativo con un nivel de significación del 5%?
El primer paso para plantear la prueba es determinar simbólicamente el peso promedio inicial de los animales como μ_1 y el peso final como μ_2. Entonces las hipótesis son:

H_0: $\mu_1 = \mu_2 (D = 0)$ y $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 (D \neq 0)$

Para el nivel de significación α y grados de libertad $v = 14$, los valores críticos de t son ±2.145. En consecuencia la regla de decisión para esta prueba de medias pareadas es:

Tabla 3.6 Peso inicial y peso final de ganado vacuno

N° animal	Muestra 1	Muestra 2	$D=X_{1n}-X_{2n}$	D^2
1	100	125	-25	625
2	105	140	-35	1225
3	90	120	-30	900
4	115	135	-20	400
5	120	135	-15	225
6	100	135	-35	1225
7	105	130	-25	625
8	115	145	-30	900
9	125	150	-25	625
10	88	110	-22	484
11	118	155	-37	1369
12	130	150	-20	400
13	140	155	-15	225
14	119	160	-41	1681
15	115	145	-30	900
			-405	11809

Si $T \geq t_o$ o $T \leq -t_0$ en ambos casos se rechaza la hipótesis nula H_0

Los datos del caso son:

$n = 15,$ $\sum D = -405$ $\sum D^2 = 11{,}809$

La media de la diferencia es: $\overline{D} = \frac{-405}{15} = -27$

Para hallar el estadístico de prueba $T = \frac{\overline{D}}{S_{\overline{D}}}$

procedemos a calcular la varianza de la diferencia,

mediante: $\sigma_D^2 = \frac{\sum D^2}{n} - (\overline{D})^2 = \frac{11809}{15} - (-27)^2 = 58.27$

El error estándar, según la ec. 3.11 es: $S_D = \frac{\sqrt{58.27}}{\sqrt{14}} = 2.04$

Entonces el estadístico de prueba es: $T = \frac{-27}{2.04} = -13.24$

A la luz de los resultados, se observa a las claras que $T = -13.24$ es menor que $t = -2.145$. En consecuencia, se concluye que la media de los pesos finales es estadísticamente diferente al de los pesos iniciales de los animales. Por tanto, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu_1 = \mu_2$ $(D = 0)$. Por tanto el investigador puede estar satisfecho porque el aumento de peso cubre sus espectativas.

3.3 USO DEL PAQUETE STATGRAPHICS

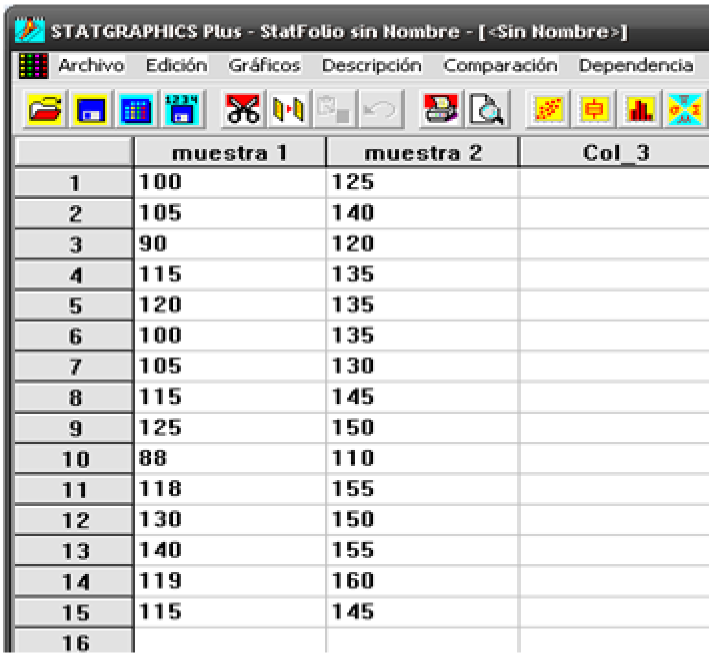
Afortunadamente, puede resolverse este caso de las medias pareadas mediante el empleo de paquetes informáticos. En esta ocasión, empleamos el statgraphics Centurión. Ingresamos los datos en la hoja que aparece en la fig. 3.8

Luego en la barra de herramientas se ingresa en $comparación \rightarrow dos\ muestras \rightarrow muestras\ pareadas$, en la ventana de opciones se ingresan los archivos de columnas que ingresamos en fig 3.8 y se obtiene la siguiente información

Los resultados proporcionados por el paquete Stastgraphics, como se puede observar, a continuación, contiene, el resumen general del procedimiento para las dos muestras del experimento. Así mismo, también proporciona el resumen estadístico para la diferencia de las muestras 1 y 2. Finalmente puede apreciarse la prueba de hipótesis que proporciona el paquete.

El paquete Statgraphics, proporciona varios resultados:
Un resumen de los datos, resumen de medidas estadísticas, la comparación de medias asumiendo varianza diferentes y las pruebas de hipótesis para la diferencia de las medias que se desea comparar. La fig. 3.8, muestra el editor de datos en la cual se ingresan los datos del experimento en columnas.

Fig. 3.8 Hoja de Statgraphics



	muestra 1	muestra 2	Col_3
1	100	125	
2	105	140	
3	90	120	
4	115	135	
5	120	135	
6	100	135	
7	105	130	
8	115	145	
9	125	150	
10	88	110	
11	118	155	
12	130	150	
13	140	155	
14	119	160	
15	115	145	
16			

Los resultados proporcionados por el paquete Stastgraphics se observa seguidamente, siguiendo la rutina:
Analizar→ *datos continuos* → *comparación de dos muestras* → *Muestras pareadas*.

Resumen de Procedimiento

Datos: muestra 1-muestra 2

15 valores comprendidos desde -41,0 hasta -15,0

El StatAdvisor

Este procedimiento está destinado a examinar las diferencias significativas entre dos muestras de datos los cuales se ha agrupado en pares. Calculará varias estadísticos y gráficos para las diferencias entre los datos pareados. El procedimiento también incluye pruebas destinadas a determinar si la diferencia media es igual a cero. Para acceder a estos procedimientos diferentes use los botones Opciones Tabulares y Opciones Gráficas en la barra de herramientas del análisis.

Resumen Estadístico para muestra 1-muestra 2

Frecuencia = 15
Media = -27,0
Varianza = 62,4286
Desviación típica = 7,90118
Mínimo = -41,0
Máximo = -15,0
Rango = 26,0
Asimetría tipi. = -0,147417
Curtosis típificada = -0,666065

El StatAdvisor

Esta tabla muestra el resumen estadístico para muestra 1-muestra 2. Incluye las medidas de tendencia central, medidas de variabilidad, y medidas de forma. De particular interés están los coeficientes de asimetría y curtosis estandarizados que pueden utilizarse para determinar si la muestra procede de una distribución normal. Los valores de estos estadísticos fuera del rango de -2 a +2 indican alejamiento significante de normalidad que tendería a invalidar cualquier test estadístico con respecto a la desviación normal. En este caso, el valor del coeficiente de asimetría estandarizado está dentro del rango esperado para los datos de una distribución normal. El valor del coeficiente de curtosis estandarizado está dentro del rango esperado para los datos de una distribución normal.

Contraste de Hipótesis para muestra 1-muestra 2

Media muestral = -27,0
Mediana muestral = -25,0

contraste t

Hipótesis nula: media = 0,0
Alternativa: no igual

Estadístico t = -13,2348
P-valor = 2,63491E-9

Se rechaza la hipótesis nula para alpha = 0,05.

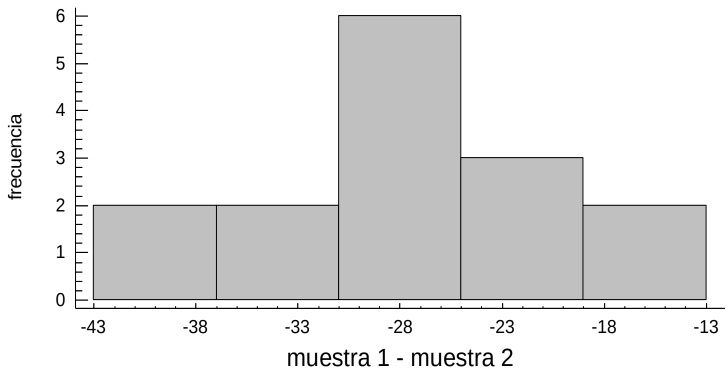
El StatAdvisor

Esta ventana muestra los resultados de tres tests concernientes al centro de la población de la que proceden las muestras, muestra 1-muestra 2. La prueba es un t-test cuya hipótesis nula es que la muestra 1-muestra 2 es igual a 0,0 frente a la hipótesis alternativa en la que la muestra 1-muestra 2 no igual 0,0. Puesto que el P-valor para este test es inferior a 0,05, podemos rechazar la hipótesis nula para un nivel de confianza del 95,0%.

Los resultados alcanzados mediante el paquete statgraphics coinciden con los resultados logrados sin empleo del programa informático.

En la fig 3.9 se puede observar el histograma para las diferencias entre los valores pareados de la muestra 1 y muestra 2

Fig. 3.9 Histograma para diferencias de medias



TÉRMINOS CLAVE

Varianzas idénticas
Varianzas diferentes
Muestras independientes
Muestras pareadas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se desea estudiar la diferencia entre el rendimiento de dos aulas de clase de un colegio privado en asignaturas de matemáticas. El profesor es el mismo para ambas secciones, el salón *A* consta de 35 alumnos y el salón *B* de 30. Los datos se muestran en la tabla siguiente:

Salón A		**Salón B**	
19	19	12	14
15	14	14	15
14	17	13	14
11	12	11	13
10	13	10	17
16	15	15	15
15	18	16	12
13	13	17	16
10	15	12	11
8	11	14	12
9	18	11	14
12	20	13	10
11	17	12	
14	19	15	
18	14	14	
17	15	10	
19	19	13	
20		12	

Suponer que las muestras son independientes y tienen varianzas idénticas. Realizar la prueba y manifestar sus conclusiones

2. Cuando no se conocen las varianzas poblacionales, y se desean probar hipótesis de diferencias de medias poblacionales, los procedimientos para muestras independientes y dependientes son diferentes. Explicar con sus palabras la diferencia relevante.

3. La comisión ambiental de un municipio del país trata de probar si presentan diferencias en la contaminación ambiental, dos marcas *A* y *B* de autos japoneses. Se observaron el funcionamiento del auto de marca A durante 25 días y se obtuvo un promedio de contaminación de 80 con una desviación estándar de 10; se observó durante 20 días el funcionamiento de la marca *B*, obteniéndose un índice promedio de contaminación de 70 con una desviación estándar de 10. Se supone que la distribución de las mediciones siguen una distribución normal, son independientes y tienen varianza idénticas. Tendrán suficientes evidencias, los funcionarios de la citada municipalidad, respecto a las diferencias de contaminación de las marcas *A* y *B* para un nivel de significación del 0.05?

4. Dos máquinas producen duchas idénticas (en pulgadas). Se supone que las longitudes de las duchas siguen una distribución normal, con una misma varianza. Por reclamaciones de clientes de la empresa se sospecha que las duchas producidas por ambas máquinas no son iguales. Para determinar las fallas se toman muestras independientes y se encuentra los siguientes datos:

	Máquina A	Máquina B
Tamaño de muestra	15	20
Promedio de muestra	3.4	3.5
Varianza de muestra	0.0040	0.0048

Realizar una prueba de hipótesis y manifestar si existen diferencias significativas entre las dos medias de la longitud de las duchas, para un nivel de significación del 5%
Obtener un intervalo de confianza del 95% para diferencia verdadera entre las dos medias poblacionales.

5. Se llevó a cabo un estudio a fin de averiguar si los promedios de calificaciones de niños y niñas son diferentes. Para llevar a cabo la investigación se considera que las calificaciones se distribuyen en forma normal con varianza idénticas. Se toman muestras independientes de niños y niñas proporcionando los siguientes datos:

Calificaciones de niños:	15.6	18.6	17.0	18.3	14.5	13.9
	19.4	19.5	17.1	16.9	16.7	18.2
Calificaciones de niñas:	15.2	18.0	16.9	19.1	16.0	13.2
	19.0	16.8	17.2	18.7	19.4	18.3

Utilizando un nivel de significación de 5%, probar la hipótesis nula de que los promedios de calificaciones de niños y niñas son todas iguales.
Obtener un intervalo de confianza del 98% para la verdadera diferencia entre las dos medias de poblaciones de niños y niñas.

6. Se realizó un estudio en una universidad nacional a fin de averiguar si los promedios de calificaciones de alumnos de economía y Negocios en un curso de finanzas son diferentes. Para llevar a cabo la investigación se considera que las calificaciones se distribuyen en forma normal con varianza idénticas. Se toman muestras independientes de alumnos de economía y Negocios proporcionando los siguientes datos de calificaciones:

Estudiantes de economía:	15.6	18.6	17.0	18.3	14.5	13.9
	19.4	18.0	19.7	18.2		
Estudiantes de negocios:	15.2	18.0	16.9	19.1	16.0	13.2
	19.0	18.3	18.4	19.6		

Utilizando un nivel de significación de 5%, probar la hipótesis nula de que los promedios de calificaciones de estudiantes de economía y negocios son todas iguales.
Obtener un intervalo de confianza del 99% para la verdadera diferencia entre las dos medias de poblaciones de estudiantes de economía y negocios.

7. En una gran empresa agroindustrial se ha desarrollado un programa de entrenamiento para determinar si la productividad de los trabajadores ha aumentado. Si D es la diferencia entre la productividad de los trabajadores por hora, antes y después del entrenamiento y se considera que se distribuyen en forma normal. Se toma una muestra de 36 trabajadores, y se encuentra que la media de la diferencia es 40 y la desviación estándar 10. Realizar una prueba de hipótesis y responder si, ¿el programa de entrenamiento en la productividad de los trabajadores de la empresa agroindustrial ha aumentado con un nivel de significación de 5%?

8. Se ha estudiado el efecto de una ración en cuyes, versus una ración enriquecida. Con esta finalidad, se seleccionaron aleatoriamente dos grupos independientes de cuyes de la misma edad. Al primer grupo se le alimenta con la ración tradicional y al otro con la ración enriquecida. Las ganancias de peso para los dos grupos se registran después de 45 días en que se han estado utilizando las raciones, los mismos que se distribuyen normalmente. A continuación se muestran los datos correspondientes (en kilogramo).

Individuo	**Grupo 1**	**Individuo**	**Grupo 2**
1	1.26	1	1.45
2	1.50	2	1.26
3	1.48	3	1.56
4	1.26	4	1.12
5	1.54	5	1.13
6	1.23	6	1.23
7	1.35	7	1.10
8	1.48	8	1.14
9	1.69	9	1.15
10	1.24	10	1.12
11	1.78	11	1.45
12	1.20	12	1.56
13	1.36	13	1.10
14	1.48	14	1.14
15	1.89	15	1.18
16	1.87	16	1.20
17	1.65	17	1.11
18	1.89	18	1.15
19	1.90	19	1.45
20	1.37	20	1.27
		21	1.20
		23	1.35
		24	1.10

Realizar una prueba de diferencias de medias entre las dos raciones. Existe diferencias significativas en el aumento de peso entre las dos raciones a un nivel de significación del 1%?

9. Se desea estudiar las bondades de una ración en animales vacunos. Para este propósito se escoge una muestra de 20 animales para realizar la prueba y medir después de 90 días el aumento de peso de los mismos. Se supone que el incremento de peso siguen una distribución normal. Los datos registrados, con pesos inicial y final, en kilogramo, se presentan en la tabla siguiente:

Individuo	Peso inicial	Peso final
1	25	60
2	30	64
3	35	50
4	28	53
5	25	48
6	20	40
7	34	56
8	29	52
9	31	50
10	35	46
11	34	51
12	33	53
13	32	61
14	31	60
15	27	45
16	26	46
17	27	51
18	28	52
19	30	56
20	26	60

Podría llegarse a la conclusión de que existen diferencias significativas en el peso final de los animales respecto al peso inicial a un nivel de significación del 5%?

10. Se emplean dos máquinas modernas para la producción de pernos idénticos. Se registran dentro de la producción el número de tornillos defectuosos producidos por ambas máquinas. Se inspeccionan las producciones de las dos máquinas en un periodo de 12 horas. Considerar que el número de pernos defectuosos se distribuye en forma normal. Probar la hipótesis de que los promedios de pernos defectuosos producidos por las dos máquinas son iguales, para un nivel de significación del 5%, bajo la consideración de que

Las dos máquinas son independientes
Las dos máquinas son dependientes.

Hora	Maq I	Maq B

1	12	12
2	13	10
3	10	8
4	5	9
5	6	4
6	8	7
7	10	3
8	14	8
9	6	6
10	9	10
11	10	12
12	13	15

11. Se ha emprendido una investigación en la cual se desea comparar los cocientes intelectuales de niños provenientes de colegios privados y de colegios estatales. Se tomaron dos muestras y los resultados fueron los siguientes:

Colegio estatal	Colegio privado
100	90
110	106
100	107
89	95
84	92
85	90
90	103
105	104
115	112
95	97
94	93
90	108
96	110
101	86
88	94
102	99

Realizar el análisis de los datos asumiendo que las varianzas son iguales con un nivel del 5% de significación
Realizar la comparación de las diferencias de medias teniendo en cuenta que las varianzas son diferentes con un nivel de significación del 5%.

12. Se desea comparar el cociente intelectual de alumnos que cursan carreras de ingeniería y alumnos de carreras de negocios, de una universidad de la capital de la república. Los datos se muestran en la tabla siguiente:

Ingeniería	Negocios
102	105
103	106
104	108
98	112
99	113
97	98
105	97
106	90
90	95
110	80
114	94
1230	108
125	109
122	112
110	123
101	120
103	119
95	118
105	94
97	95

Realizar el análisis estadístico para los datos de la tabla asumiendo que los datos están relacionados.
Realizar las comparaciones de las diferencias de medias suponiendo que las muestras son independientes y varianza idénticas.
Realizar las comparaciones de las diferencias de medias asumiendo que las varianzas son diferentes.

CAPÍTULO IV

DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Indudablemente para iniciar una investigación concerniente a investigaciones cuantitativas, es conveniente recurrir a los estadísticos para el consejo técnico. En cambio, el trabajo de campo antes de dar inicio es conveniente que el investigador tenga todos los planes bien determinados a fin de no dar margen a contingencias incontrolables que pueden presentarse en el proceso. Las razones, los principios, las técnicas, pruebas estadísticas, etc, todas deben estar estudiadas y escritas en el planeamiento del experimento. Siendo así, el análisis y sobre todo la interpretación de los resultados obtenidos no debe presentar complicación y por supuesto, las conclusiones a que se arriben deben tener el soporte científico suficiente para que éstas sean válidas. En consecuencia los diseños experimentales son un conjunto de pruebas en las cuales los niveles de los factores de entrada bajo estudio, se manipulan a voluntad, esperando respuestas sobre los cambios en los factores de salida. Los objetivos que todo investigador persigue cuando emprende un experimento se pueden resumir en los siguientes:

1° Distinguir qué factores ejercen mayor influencia en las respuestas que se van a registrar.
2° Determinar que niveles del factor independiente tienen mayor influencia en el factor dependiente a fin de mantener las respuestas dentro de ciertas especificaciones conocidas.
3° Determinar que niveles del factor de entrada tienen mayor influencia en el factor de respuesta con el fin de lograr una menor variabilidad.
4° Determinar los niveles adecuados del factor de entrada a fin de reducir la influencia de los factores intervinientes.

4.1 RAZONES PARA PLANEAR UN EXPERIMENTO

¿Por qué es conveniente planear un experimento?, hay muchas razones que constituyen el aspecto primordial para planear un experimento, entre las cuales se debe mencionar:

a) El experimento de campo tenga el tamaño adecuado, arreglado al aspecto económico y técnico, algunas veces por la connotación que pueden alcanzar los resultados de un experimento, resulta conveniente usar un número de réplicas grande, con la finalidad de detectar finas diferencias entre los tratamientos, aunque esto puede resultar en un alto costo.
b) El investigador pueda realizar todas las comparaciones posibles, las estimaciones de parámetros y plantear las pruebas de hipótesis que sean de valor para la investigación.
c) Se controla con mayor detalle las posibles fuentes de variabilidad y por tanto el error experimental se puede estimar con mayor eficiencia.

d) Los principios de los diseños se aplique con oportunidad y sobre todo en el momento que sea necesario.

Dado que el método científico obliga a sistematizar los datos mediante las herramientas que nos proporciona la estadística, es necesario tener un orden en el desarrollo de la investigación de campo. Este orden deben incluir los siguientes pasos:

a) Formulación de los objetivos, es importante que el investigador defina bien sus objetivos, especificando lo que deseamos lograr con el experimento. Algunas veces los investigadores quieren abarcar demasiado y plantean una serie de objetivos que al final no tienen la relevancia para el estudio debido a que son muy difusos, y en otros, los objetivos que se definen no son claros o son muy limitados.

La definición de los objetivos debe ser clara, concisa y especifica. Debe incluir información suficiente sobre la población, de la cual se va a realizar las generalizaciones. Como los resultados del investigador se basan en muestras que se extraen de poblaciones de interés, éstas deben contener suficiente información sobre la población a la que se orientan los resultados.

b) Formular especificaciones detalladas del experimento,

Algunas de las especificaciones más importantes que podemos detallar para el éxito del experimento son:

1º Escoger el lugar más aparente para la investigación si va a conducir un experimento de campo

2º especificar de manera clara y concreta los tratamientos o factores del experimento.

3º Especificar el material experimental, incluyendo información referente sobre cuál será la parcela experimental.

4º Especificar el diseño experimental, con los procedimientos de aleatorización de las unidades experimentales

5º Especificar el principio de control local para evitar de esta forma la influencia, en los resultados, de los efectos de borde.

6º Especificar el número de repeticiones en el experimento de campo o de laboratorio.

7º Las técnicas experimentales a emplear son valiosas por lo que es importante especificar cuáles se van a usar.

8º Finalmente especificar qué variables de respuesta se van a seleccionar en el experimento, es decir, debe tenerse la seguridad de que la variable proporcione información relevante sobre el experimento. Los registros de las respuestas pueden ser múltiples, dependerá de los objetivos que se trazan y del nivel de detalle del experimento.

c) Determinar el mejor método a usar en la investigación, esta especificación se debe realizar en la fase de planeamiento del experimento para evitar brechas en el momento de realizar el análisis de los resultados.

d) Realización del experimento en el campo o laboratorio, es conveniente monitorear permanentemente el proceso, con la finalidad de asegurar que el experimento se está llevando a cabo de acuerdo a lo planeado.

e) Análisis de los datos, se lleva a cabo de acuerdo al método seleccionado, de forma ordenada. En la actualidad existe en el mercado paquetes estadísticos que contribuyen en forma eficiente al análisis de los datos. Debe realizar un análisis de residuos y verificación del modelo cuando sea necesario.
f) Conclusiones y recomendaciones. Una vez culminado el análisis de los registros, se debe arribar a conclusiones prácticas[5], acerca de los resultados recomendando un curso de acción.

Si usamos diseños comunes, y no hay datos perdidos, probablemente no se presentan mayores inconvenientes en el análisis de los resultados.
Es conveniente con frecuencia, antes de realizar el experimento de campo, describir las fuentes de variabilidad, es decir, bloques, tratamientos, variedades, razas de animales, métodos, etc.
A continuación presentamos en forma clara, pero breve, las especificaciones más relevantes en los experimentos:
1º Localidades, Las localidades escogidas deben representar el área sobre la cual se van a hacer conclusiones. La selección final de las localidades que se usarán se hace después de haber estudiado cuidadosamente un grupo de localidades posibles. Usualmente son seleccionadas deliberadamente, para representar ciertas condiciones ambientales. En otras ocasiones se les pueden escoger de una forma aleatoria. El área dentro de cada localidad debe ser tan homogénea como sea posible en aspectos tales como tipo de suelo, historia de los cultivos, declive, drenaje, fertilidad, etc.

2º Tratamientos, al seleccionar el tratamiento en un experimento se debe tener en cuenta los siguientes aspectos.

- El número total de tratamientos. Esto está determinado por los niveles de los factores o categorías de la variable independiente, que deben proveer la información suficiente y necesaria respecto de los problemas que se estudian. El límite superior en el número de tratamientos lo puede determinar la disponibilidad del material experimental y la rigurosidad del experimento. Así mismo, el planeamiento referente al número de tratamientos que darán un tamaño de bloques razonables.
- La función de los tratamientos. Si el propósito de un tipo de tratamiento es comparar, diferentes variedades de cebolla de exportación y ver cuál es la mejor, entonces la siembra de las variedades de cebolla son factores fijos de los tratamientos en el campo. En consecuencia, los tratamientos vienen a ser las combinaciones de las variedades. Otras formas de experimentos pueden ser, las dosis de fertilizantes en cultivos agroindustriales con potenciales de exportación, en este caso los tratamientos representan los niveles de fertilización aplicados a los cultivos de importancia económica en la actividad de exportación.

[5] Montgomery, D Control estadístico de la calidad, México 2004.

- Arreglo factorial de los tratamientos. Un tipo de experimento muy usual y útil resulta de combinar dos o más factores a distintos niveles, como si se tratara de dos experimentos en uno.

  Este tipo de tratamiento, consiste en combinar todos los niveles de los factores.

Por ejemplo, consideremos un experimento factorial de 3x3, en la que se combinan tres fertilizantes foliares orgánicos y tres distanciamientos distintos entre plantas. El factor fertilizante se puede denotar por F y distanciamiento por D.

A continuación vamos a revisar los principales diseños experimentales que se emplean frecuentemente en experimentos agrícolas, industriales y otras áreas afines del conocimiento, proporcionando las características principales de cada uno de ellos. En la parte final de cada diseño ilustraremos el uso de paquetes estadístico que en la actualidad se emplean para la solución de problemas.

4.2 DISEÑO COMPLETAMENTE AL AZAR

Es un diseño útil cuando las unidades experimentales tienen variabilidades similares. Frecuentemente sucede en algunos experimentos de laboratorio e invernaderos en las cuales los materiales experimentales que se usan, previamente se mezclan, para luego dividirlas en lotes pequeños que se guardan en depósitos o maceteros en donde se aplicarán los tratamientos. El uso de este diseño se puede realizar en experimentos de campo cuando se tienen antecedentes de la homogeneidad de los suelos y los tratamientos son reducidos.

4.2.1 Características del diseño

Es el diseño más simple de todos los diseños, debido a que los tratamientos que se van a poner en estudio son distribuidos al azar sobre el total del material experimental disponible. Esto significa que en este diseño no existe ninguna restricción para la distribución en el campo experimental. El número de observaciones por tratamiento pueden ser iguales o diferentes y aún en esta situación, el análisis estadístico es sencillo. Es el diseño que puede usarse en experimentos de campo y laboratorio puesto que no hay limitaciones, de niveles de tratamiento, ni repeticiones, salvo el aspecto económico.

4.2.2 Ventajas del DCA

-El análisis estadístico es sencillo de planear

-Pueden tener tratamientos con número de repeticiones diferentes.

-Permite un máximo número de grados de libertad

4.2.3 Desventajas del DCA

-Todas las variaciones entre las unidades experimentales pasan a formar parte del error experimental. Es por ello que su grado de precisión es menor que otros diseños que restringen la aleatoriedad.

-Es más apropiado para pequeños números de tratamientos y para un material experimental homogéneo.

4.2.4 Modelo estadístico del DCA

El modelo aditivo lineal de este diseño es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} \qquad i = 1,2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots t$$

$$j = 1,2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots . r$$

μ; *media de la población*
τ_i: *efecto aditivo del i − ésimo tratamiento*
ϵ_{ij}: Error aleatorio al que está sujeto una observación.
Se distribuyen normalmente $\sim N(0, \sigma^2)$

En la tabla 4.1, puede observarse la forma como se debe realizar la distribución de los datos que se recogen del experimento, se elabora una tabla de doble entrada en la que se disponen los niveles de tratamientos y repeticiones del experimento, tener presente que en la práctica, no siempre se encuentra con experimentos en la cual el número de repeticiones son iguales, como es el presente modelo. En acápites posteriores desarrollaremos el modelo aludido.

Tabla 4.1 Esquema de un DCA para igual número de muestras por tratamiento

Repeticiones	Tratamientos				Gran total
	1	2	…	t	
1	Y_{11}	Y_{21}	…	Y_{t1}	
2	Y_{12}	Y_{22}	...	Y_{t2}	
.	.	.		.	
.	.	.		.	
.	.	.		.	
r	Y_{1r}	Y_{2r}	…	Y_{tr}	
Total tratamiento	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$	…	$Y_{t.}$	$Y_{..}$
Media	$\bar{Y}_{1.}$	$\bar{Y}_{2.}$	…	$\bar{Y}_{t.}$	$\bar{Y}_{..}$
Tamaño de muestra	*n*	*n*	…	*n*	N

4.2.5 Análisis de Varianza

El análisis de varianza es una técnica mediante la cual se prueban las medias de los tratamientos y se observan las fuentes de variabilidad de la variable de respuesta. En el caso del diseño completamente al azar, el esquema del ANVA, se presenta en la tabla siguiente:

Tabla 4.2 Esquema del análisis de varianza DCA

Fuente de variabilidad	G.L	S:C.	C.M.	F_c	F_t
Tratamiento	$t-1$	$\frac{\sum Y_{i.}^2}{r} - TC$	$\frac{SCt}{t-1}$	$\frac{CMt}{CME}$	* **
Error	$t(r-1)$	$SCT - SCt$	$\frac{SCE}{t(r-1)}$		
Total	$rt-1$	$\sum Y_{ij}^2 - TC$			

*Diferencia estadística significativa
**Diferencia estadística altamente significativa

Dónde:$t = Nº\ de\ tratamientos$
$r = Nº\ de\ repeticiones$
SCt: $Suma\ de\ cuadrado\ de\ tratamientos$
SCT: $Suma\ de\ cuadrado\ de\ totales$
SCE: $Suma\ de\ cuadrado\ del\ error$
CMt: $Cuadrado\ medio\ de\ tratamiento$
CME: $Cuadrado\ medio\ del\ error$

Ejemplo 4.1 En la siguiente tabla se tienen los rendimientos en Kg de mandarinas por planta en un comparativo de cinco variedades de portainjertos, con cinco repeticiones. El experimento se ha conducido bajo un Diseño Completamente al Azar.

Tabla 4.3 Rendimiento de cinco variedades de mandarina(Kg/planta)

Repeticiones	Tratamiento(Variedades)					Total
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
1	101	54	83	67	29	
2	97	65	68	40	45	
3	100	57	77	46	51	
4	102	62	75	52	42	
5	105	60	80	60	50	
Total	505	298	383	265	217	1668
Media	101	59.6	76.6	53	43.4	66.72

Los datos del ejemplo 4.1 están contenidos en la tabla 4.3, las unidades experimentales, árboles, fueron asignados a cada tratamiento en forma aleatoria. Las variedades de portainjerto que vamos a estudiar se justifican precisamente por la suposición de que los datos pueden considerarse como muestras aleatorias

de cinco poblaciones normales que poseen la misma varianza y que si difieren en algo es sólo en sus medias.
A esta altura, conviene plantearnos la siguiente interrogante antes del planteamiento de las hipótesis: ¿hay evidencias suficientes que indique que existen diferencias reales entre los valores medios de los distintos tratamientos?
La hipótesis nula a comparar entonces es que las medias de los tratamientos μ_1, μ_2, μ_3 , μ_4 y μ_5 son todas iguales, frente a la hipótesis alternativa de que no lo son.

Hipótesis nula: *H0*: Las medias de rendimientos de los tratamientos son Iguales ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$)

Hipótesis alternativa: *H1*: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4 \neq \mu_5$ (Por lo menos un tratamientos es diferente)

La regla de decisión se plantea como:

Si $F_c > F_t$, se rechaza la *H0*

Los cálculos necesarios para comparar estas hipótesis se realizan haciendo uso de la tabla de análisis de varianza, instrumento sumamente valioso para la discusión de los resultados, debido a Sir Ronald Fisher, quien desarrolló esta técnica. Básicamente el análisis de varianza nos determina si las diferencias entre las medias de los tratamientos (intermedias de tratamientos) son mayores de lo que podría esperarse razonablemente, de las variaciones que ocurren dentro de los tratamientos (intramedias de tratamientos).
En la tabla 4.3 se muestran los resultados de las observaciones que se han recogido. La media general se define como la suma total de las observaciones dividida entre el número total de observaciones, es decir,

$$\bar{Y}_G = \frac{1668}{25} = 66.72$$

4.2.6 Estimación de la Variabilidad dentro y entre tratamientos

a) Variabilidad dentro de los tratamientos
La estimación de esta variación y su consistencia puede obtenerse agrupando las distintas varianzas muestrales obtenidas de los datos contenidos en cada tratamiento. Por ejemplo, para el primer conjunto de datos o primer nivel de tratamiento $n_1 = 5$ observaciones con media

$$\bar{x}_1 = \frac{505}{5} = 101$$

la suma de cuadrados SC_1, de desviación respecto a la media es:

$$SC_1 = (101-101)^2 + (97-101)^2 + (100-101)^2 + (102-101)^2 + (105-101)^2 = 34$$

$$SC_2 = (54-59.6)^2 + (65-59.6)^2 + (57-59.6)^2 + (62-59.6)^2 + (60-59.6)^2 = 73.2$$

De la misma forma calculamos los SC_3, SC_4 y SC_5. Hay cuatro grados de libertad $v = n_1 - 1 = 5 - 1 = 4$, para cada tratamiento, por lo que la varianza muestral del primer y segundo tratamiento es:

$$S^2{}_1 = \frac{34}{4} = 8.5 \qquad S_2{}^2 = \frac{73.2}{4} = 18.3$$

Análogamente

$$S^2{}_3 = \frac{129.2}{4} = 32.3 \qquad S^2{}_4 = \frac{464}{4} = 116 \qquad S^2{}_5 = \frac{313.2}{4} = 78.3$$

En general pueden agruparse las K varianzas muestrales, para poder obtener la estimación de la varianza dentro de los tratamientos, agrupando las varianzas de cada tratamiento y se plantea como[6]

$$S^2{}_R = \frac{v_1 S^2{}_1 + v_2 S_2^2 + \cdots + v_k S_k^2}{v_1 + v_2 + \cdots + v_k}$$

$$= \frac{SC_1+SC_2+SC_3+SC_4+SC_5}{(n_1-1)+(n_2-1)+(n_3-1)+(n_4-1)+(n_5-1)} = \frac{SC_R}{N-k}$$

Donde n_i es el número de observaciones dentro de cada tratamiento y k es el número de tratamientos. En consecuencia, la suma de cuadrado dentro de los tratamientos, para el ejemplo 4.1, es:

$$SC_R = 34 + 73.2 + 129.2 + 464 + 313.2 = 1013.6$$

Y el número de grados de libertad dentro de cada tratamiento es.

$$v_R = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

Por lo tanto, la estimación agrupada del error, llamado cuadrado medio dentro de los tratamientos es.

$$S^2{}_R = \frac{SC_R}{v_R} = \frac{1013.6}{20} = 50.68$$

Bajo la hipótesis de muestreo aleatorio el cuadrado medio del error da una estimación de la varianza del error dentro de los tratamientos, σ^2, basado en 20 Grados de libertad.

Algebraicamente, si usamos y_{ti} para denominar a la observación i- ésima del tratamiento, la suma de cuadrado dentro del tratamiento, para el mismo ejemplo, es

[6] El subíndice R indica los residuales

$SC_R = SC_1 + SC_2 + SC_3 + SC_4 + SC_5$

Cuyos cálculos se observa a continuación:

$$SC_1 = 101^2 + 97^2 + 100^2 + 102^2 + 105^2 - \frac{505^2}{5} = 34$$

$$SC_2 = 54^2 + 65^2 + 57^2 + 62^2 + 60^2 - \frac{298}{5} = 73.2$$

$$SC_3 = 83^2 + 68^2 + 77^2 + 75^2 + 80^2 - \frac{383^2}{5} = 129.2$$

$$SC_4 = 67^2 + 40^2 + 46^2 + 52^2 + 60^2 - \frac{265^2}{5} = 464$$

$$SC_5 = 29^2 + 45^2 + 51^2 + 42^2 + 50^2 - \frac{217^2}{5} = 313.2$$

En consecuencia la suma de cuadrado dentro de los tratamientos, para todos los tratamientos, es por tanto:

$$SC_R = 34 + 73.2 + 129.2 + 464 + 313.2 = 1013.6$$

Cifra similar a lo encontrado mediante la primera forma.

Y el cuadrado medio dentro de los tratamientos será

$$CM_R = \frac{SC_R}{N-k} = \frac{1013.6}{20} = 50.68$$

Donde k es el número de tratamientos
Para que el lector fortalezca sus capacidades, desarrollemos el siguiente ejemplo

Ejemplo 4.2 Cinco raciones diferentes fueron administrados a 25 animales vacunos. La asignación de los tratamientos a los animales fue realizada al azar. Se midió, entonces, el aumento de peso de los animales a los 30 días. Los incrementos de peso, en gramos por animal son las que se dan a continuación. Calcular S_R^2 o cuadrado medio dentro de los tratamientos para estos datos.

Raciones				
A	B	C	D	E
40	52	60	39	66
41	54	61	38	65
43	56	63	40	64
45	54	68	43	60
47	52	60	41	61

Respuesta: 6.54

b) Variabilidad entre tratamientos
La estimación de la variación entre tratamientos se obtiene mediante el cuadrado medio entre tratamientos, que es la relación entre la suma de cuadrados entre tratamientos y los grados de libertad entre tratamientos. Se calcula á partir del modelo de la tabla 4.2.(ANVA)

La suma de cuadrados entre tratamientos se plantea como:

$$SC_T = \frac{\sum(Y_{i.})^2}{n} - \frac{(\sum Y_{ij})^2}{N}$$

Dónde: $n = es\ el\ tamaño\ de\ muestra\ de\ tratamientos$
$N = Número\ total\ de\ observaciones$

Y los grados de libertad entre tratamientos es $k - 1$. Entonces el cuadrado medio entre tratamientos es:

$$S^2{}_T = \frac{SC_T}{k-1}$$

En el ejemplo que hemos desarrollado con los datos de la tabla 4.3, el cálculo del cuadrado medio entre tratamientos se realiza de la siguiente manera:

TOTALES DE TRATAMIENTOS				
A	*B*	*C*	*D*	*E*
505	298	383	265	217

$GRAN\ TOTAL =\ 1{,}668$

Entonces

$$SC_T = \frac{505^2 + 298^2 + 383^2 + 265^2 + 217^2}{5} - \frac{1668^2}{25} = 10277.44$$

Y los grados de libertad de los tratamientos es

$$v_T = k - 1 = 5 - 1 = 4$$

Por lo tanto el cuadrado medio entre tratamiento será:

$$CM_T = S^2{}_T = \frac{10277.44}{4} = 2569.36$$

c) **Comparación de las estimaciones entre tratamientos y dentro de tratamientos**

Antes del análisis estadístico, se planteó las hipótesis nula y alternativa. La hipótesis se parte del supuesto de que no hay diferencias entre las medias de los tratamientos, a estas alturas tenemos dos estimaciones de la varianza, σ^2 : la estimación entre tratamientos $S^2{}_T = 2569.36$, con $v_T = 4$ grados de libertad y la estimación dentro de los tratamientos $S^2{}_R = 50.68$, con $v_R = 20$ grados de libertad. Como se podrá apreciar, la estimación entre tratamientos es mayor que la estimación dentro de los tratamientos. Por esta razón, los resultados a que se han arribado inducen a pensar que la hipótesis nula no es verdadera y parte de la variación entre tratamientos se debe a diferencias reales entre las medias de los tratamientos. A continuación vamos a ordenar los cálculos en una tabla de análisis de varianza.

Tabla 4.4 Análisis de varianza

Fuentes de variabilidad	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F_c*
Entre tratamientos	$v_T = 4$	$SC_T = 10277.44$	$S_T^2 = 2569.36$	50.78
Dentro de tratamientos	$v_R = 20$	$SC_R = 1013.6$	$S_R^2 = 50.68$	
Total general	$v_D = 24$	$SC_D = 11291.04$	$S_D^2 = 470.46$	

La medida de la variación total de los datos que estamos analizando, puede obtenerse calculando la varianza muestral de todos los datos conjuntamente, referido a la tabla 4.3, mediante la ecuación,

$$SC_D = \sum Y_{ij}{}^2 - \frac{\left(\sum Y_{ij}\right)^2}{N}$$

denominada suma total de los cuadrados, y dividiendo por el número apropiado de grados de libertad $v_D = N - 1$. Tenemos:

$$S_D^2 = \frac{SC_D}{N-1}$$

Para el ejemplo que venimos desarrollando hacemos:

$$SC_D = 101^2 + 97^2 + 100^2 + \cdots + 51^2 + 42^2 + 50^2 - \frac{1668^2}{25} = 11291.04$$

Y los grados de libertad igual $v_D = 24$, entonces la variabilidad total es

$$S_D{}^2 = \frac{11291.04}{24} = 470.46$$

Observe que, la suma de cuadrados entre tratamientos y dentro de tratamientos cumple la propiedad aditiva 11291.04 = 10277.44 + 1013.6, lo mismo sucede con los grados de libertad 24 = 20 + 4. Esto es una característica relevante de la tabla 4.4, del análisis de varianza, ya en la columna de las sumas de cuadrados como en los grados de libertad se cumple que la suma de los valores entre tratamientos (SC_T) y dentro de tratamientos (SC_R) dan los correspondientes valores para la suma de cuadrado total (SC_D). La propiedad aditiva de la suma de cuadrados se deriva de la identidad algebraica siguiente:

$$SC_D = \quad SC_T \quad + \quad SC_R$$

Para tomar la decisión de rechazar o aceptar la H_0, observemos los resultados de la tabla 4.4. Si comparamos los valores de F_c y $F_{(4,20;\ 0.05)}$ se nota que F_c es mayor que el valor de la tabla, en consecuencia, existen suficientes evidencias para rechazar la H_0., significando que existen diferencias significativas entre las medias de tratamientos. Esto nos proporciona información de que hay suficiente fuerza para indicar que todos los tratamientos no pertenecen a poblaciones con una media común μ. Sin embargo, no indica que diferencias pueden ser consideradas estadísticamente significativas.

Ejemplo 4.3 Construir la tabla de análisis de varianza para los datos del ejemplo 4.2

Respuesta: $SC_T = 2257.44$ $\quad S_T{}^2 = 564.36$ $\quad v_T = 4$

Uso del Paquete Statgraphics para el análisis

El uso del paquete informático para la solución del problema de la tabla 4.3 del ejemplo 4.1, es importante, ya que permite que el análisis de los datos recogidos sea más breve y eficiente.

La ruta a seguir es: ingresar al programa, en la barra de herramientas ingresar en $comparación \rightarrow\ Análisis\ de\ varianza\ \rightarrow\ ANOVA\ simple.$

El StatAdvisor

Este procedimiento realiza un análisis de la varianza simple para rendimiento en kg por parcela. Realiza varios test y gráficos para comparar los valores medios de peso para los 5 diferentes variedades de portainjertos de mandarina. El F-test en la tabla de ANOVA comprobará si hay alguna diferencia significativa entre las medias. Si hay, los Test de Rangos Múltiples le indicarán las medias que son significativamente diferentes unas de otras. Los diferentes gráficos ayudan a juzgar la significación práctica de los resultados, y permiten buscar las posibles violaciones a las asunciones subyacentes en el análisis de la varianza.

El StatAdvisor

La tabla ANOVA descompone la varianza de la variable rendimiento en dos componentes: un componente entre grupos y un componente dentro de los grupos.

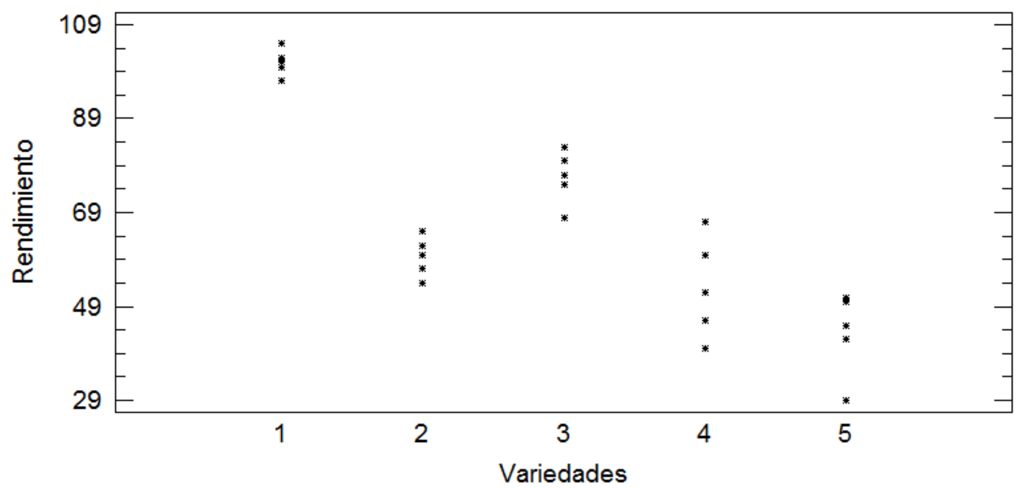
Los resultados del análisis se pueden apreciar seguidamente

Tabla 4.5 ANOVA para Rendimiento según variedades dado por STATGRAPHICS

Fuente de variabilidad	SC	GL	CM	Cociente-F	P-valor
Entre grupos	10277,4	4	2569,36	50.6977	0,0000
Intra grupos	1013,6	20	50,68		
Total(Corr.)	11291,0	24			

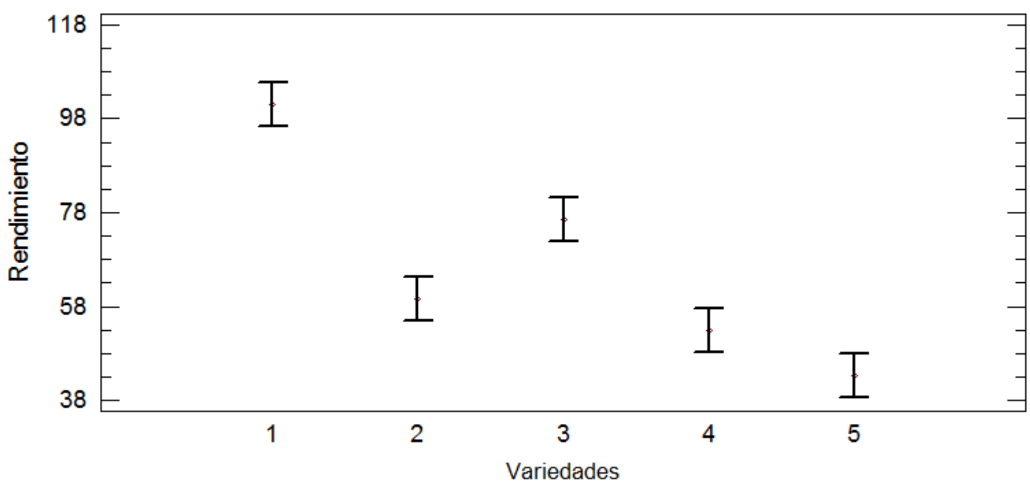
El *F*-ratio, que en este caso es igual a 50,6977, es el cociente de la estimación entre grupos y la estimación dentro de los grupos. Puesto que el p-valor del test *F* es inferior a 0,05, hay diferencia estadísticamente significativa entre los pesos medios de un nivel de raciones a otro para un nivel de confianza del 95,0%. Para determinar las medias que son significativamente diferentes unas de otras, se realiza los Test de Rangos Múltiples en la lista de Opciones Tabulares.

Fig. 4.1 Representación por variedades



En la fig 4.1 se ilustra la representación de los datos por variedades de porta injerto de mandarina, en ella se puede notar que la variedad 1 es la que presenta mayores rendimientos y la variedad 5 el de menor rendimiento. En la fig 4.2, se nota el gráfico de las medias de los tratamientos. En ella se observa para mayor explicación, que la media del primer tratamiento presente un promedio mayor respecto al resto.

Fig. 4.2 Gráfico de medias



4.2.7 Validación del Modelo de Diseño Completamente al Azar.

El procedimiento que hemos seguido, de las variedades de portainjertos en mandarinas y que nos condujo a la tabla 4.5 del análisis de varianza, ha sido puramente aritmético. Las relaciones que guardan los distintos términos del modelo y sus sumas de cuadrados son identidades que se cumplen con cualquier conjunto de datos. Sin embargo, este modo específico de análisis es importante en relación a un modelo determinado. En concreto, es pertinente si los datos son

muestras aleatorias de cinco poblaciones normales de igual varianza pero probablemente con distintas medias.
En este caso, como se trata de un modelo irrestricto al azar puede escribirse como[7]:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

En el caso del modelo, se supone que los ϵ_{ij} , se distribuyen idéntica e independientemente como una distribución normal con media cero y varianza desconocida σ^2 (DIIN). Si esto es cierto, entonces S_R^2 , y las medias $\bar{Y}_{1.}, \bar{Y}_{2.}, \dots, \bar{Y}_t$, serían en conjunto estimadores suficientes de σ^2 y $\mu_{1.}, \mu_{2.}, \dots, \mu_t$, que se constituyen en los únicos parámetros del modelo.
Entonces, si la hipótesis DIIN(0, σ^2) fuera correcta, toda la información concerniente sobre $\mu_{1.}, \mu_{2.}, \dots, \mu_t \; y \; \sigma^2$, vendría suministrada por los t tratamientos $\bar{Y}_{1.}, \bar{Y}_{2.}, \dots, \bar{Y}_{t.} \; y \; S_R^2$. Si pudiéramos estar conformes con la precisión de esta hipótesis, podríamos asegurar que después que se han calculado estos estadísticos queda poca información pertinente en los datos originales y podríamos, por lo tanto, prescindir de los residuos y datos originales y concretar nuestra atención en la interpretación de estos estadísticos.
Por lo demás, consideramos que no sería ético realizar el análisis sin antes realizar la comprobación de la hipótesis, puesto que los datos pueden contener información valiosa no contemplada en el modelo del diseño y por lo tanto no fue puesta de manifiesto en tabla del ANVA, correspondiente. Por ejemplo, supongamos que durante la siembra de los portainjertos de mandarina hubiese ocurrido un temporal intenso, provocando que los nutrientes del suelo fueran arrastrados hacia otras áreas, provocando un retardo en el crecimiento de las plántulas. Este hecho, no está considerado en el modelo, pero sin embargo, la aleatoriedad en la asignación de las plántulas a las parcelas, nos asegura que los errores derivados de esta tendencia sistemática del retardo en el crecimiento aparecen aleatoriamente en los grupos de tratamientos.

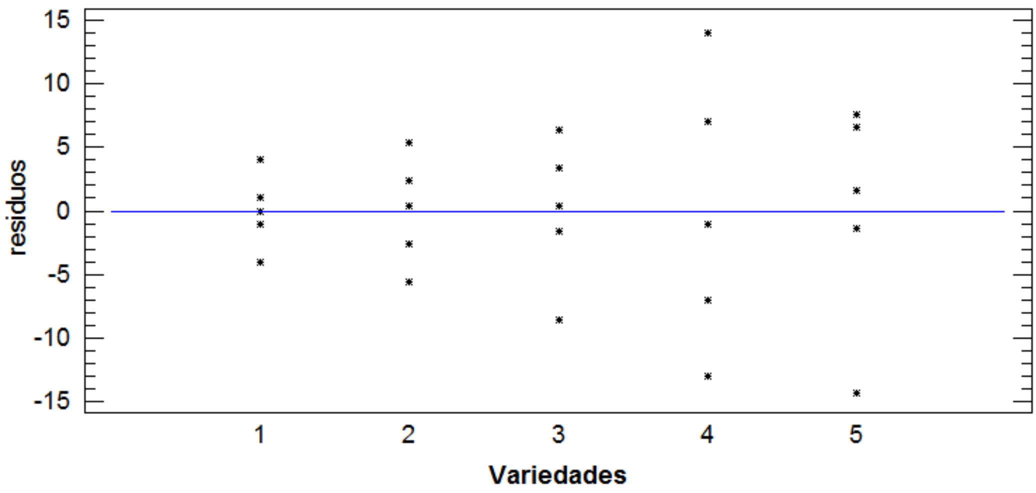
a) Análisis de los residuos

Los residuos son valores que quedan después de ser eliminadas las contribuciones sistemáticas del modelo del diseño. Si las hipótesis que se plantean relacionadas al modelo, son ciertas, se espera encontrar aparte de las restricciones, las variaciones aleatorias de los residuos. Si por el contrario en el análisis se descubre que estos residuos contienen tendencias sistemáticas no explicadas, el modelo está en duda y por tanto también las hipótesis.
Es conveniente antes de realizar el análisis estadístico, analizar la tabla de residuos, por que brinda una visión de los resultados del experimento, antes de proceder al análisis respectivo. Este cuidado que debe guardarse, ayuda en las conclusiones del experimento, de lo contrario podríamos caer en situaciones inútiles. La ilustración del análisis de los residuos puede observarse en fig 4.3, que presentamos a continuación.

[7] Donde μ, es la media general , τ_i, es el efecto del tratamiento, ϵ_{ij} es el error experimental

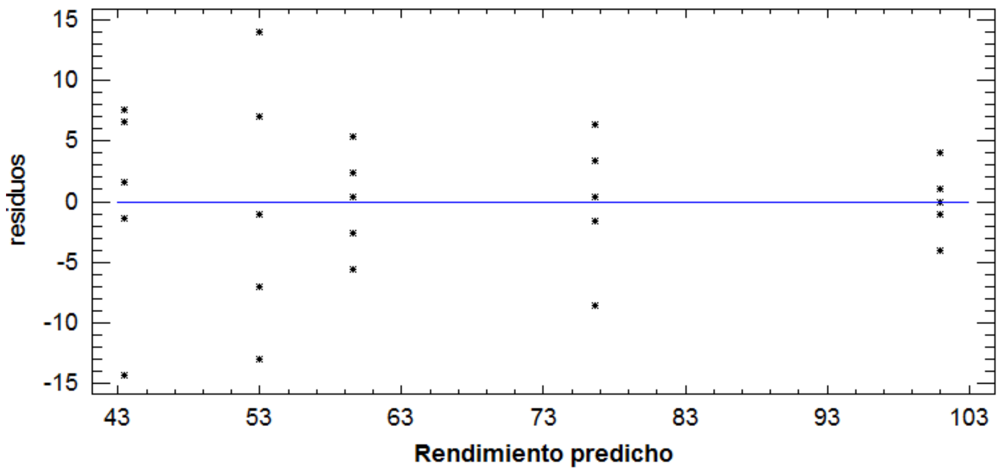
Si la hipótesis planteada es verdadera, el gráfico tendrá la apariencia de una distribución normal centrada en cero. Si por el contrario, el número de observaciones son escasas, aparecerán fluctuaciones importantes, debido a que la apariencia no es necesariamente un indicativo de una causa subyacente. Sin embargo, si aparecieran anormalidades significativas, se debe buscar las causas posibles que la originan. Las anormalidades más frecuentes que se revelan en los gráficos ocurre cuando uno o más de los residuos es mucho mayor o mucho menor que los demás.

Fig. 4.3 Gráfico de Residuos para rendimiento



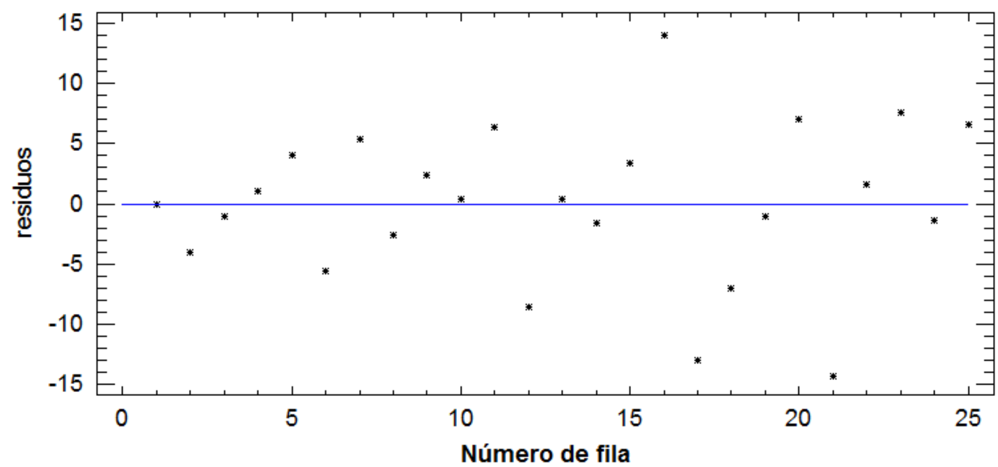
En estas circunstancias, las ocurrencias de las anormalidades, es más probable que se deba a errores humanos o aritméticos. En todo caso, se deben revisar los datos originales de las observaciones. La fig. 4.3, no da indicaciones de este tipo de anormalidades en los rendimientos de las variedades de mandarinas.
Si el modelo es apropiado los residuos no deben presentar ninguna relación con los valores de alguna variable, es decir, no deben estar relacionados con el nivel de la propia respuesta (rendimientos para nuestro ejemplo). La ilustración gráfica, debe estar referido en función de los valores estimados $\hat{y}_{i.}$, tal como se observa en la figura 4.4, con los datos sobre rendimiento de las variedades de portainjerto de mandarinas.

Fig. 4.4 Residuos y rendimiento estimado



Algunas veces, la varianza de los residuos crece a medida que aumenta el nivel de las respuestas. Si los rendimientos tuvieran un error en tasas constantes, los valores absolutos de los residuos tenderían a crecer a medida que aumenta el nivel de las observaciones y el gráfico aparecería como forma de embudo, que en el caso presente, no se observa tal tipo de comportamiento.
Es frecuente observar la variación de los rendimientos de una variedad de cultivo que varíen con el tiempo, o la destreza del investigador, puede aumentar a medida que el tiempo pasa. Las tendencias que se pueden presentar de este tipo, puede apreciarse realizando un gráfico, como de la fig 4.5, de residuos y tiempo. Al observar la fig 4.5 al parecer no hay evidencias suficientes como para sospechar un efecto de este tipo para los datos de rendimientos de las variedades de portainjerto de mandarinas.

Fig. 4.5 Gráfico residuos para rendimiento



b) La tabla del Análisis de Varianza

Culminado la fase de los residuos, y comprobado que no se presentan anormalidades, se puede analizar la tabla del ANVA,. Concretamente, la tabla nos proporciona la base para realizar el contraste de las hipótesis de que las medias de los tratamientos son todas iguales, es decir, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$.

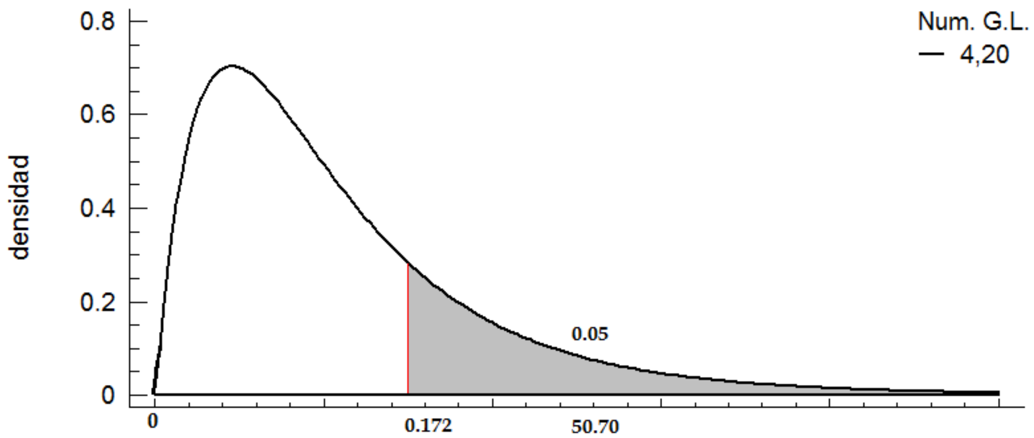
La tabla del ANVA, para los datos del ejemplo 4.1, se expone en la tabla 4.6

Tabla 4.6 Análisis de Varianza

Fuente	*SC*	*GL*	*CM*	*Cociente-F*	*P-valor*
Entre grupos	10277.4	4	2569.36	50.70	0.0000
Intra grupos	1013.6	20	50.68		
Total	11291.0	24			

En el caso de nuestro ejemplo, si la hipótesis nula fuera cierta y la hipótesis de errores DIIN $(0\,,\sigma^2)$ se cumpliera, la relación o ratio $\frac{CM_T}{CM_R}$, seguiría una distribución *F* con 4 y 20 grados de libertad, de acuerdo a la fig. 4.6. El área debajo de la curva mayor que el valor de *F* o ratio es 0.10715 x 10^{-11}, es decir, prácticamente cero.

Fig. 4.6 Distribución de F



El nivel de significación adecuado y usado frecuentemente en los experimentos nos proporciona el paquete Statgraphics, Así, la probabilidad de un 5% a la derecha, otorga un valor de *F*, con 4 y 20 grados de libertad, igual a 0.172, como se observa en la figura 4.6. Por tanto, con suficiente evidencia, los datos rechazan la hipótesis nula y consideramos que hay diferencias entre las medias de los tratamientos. El presente análisis, se denomina análisis de la varianza para un sólo factor o de clasificación simple, dado que las observaciones que se han recogido del campo experimental(o laboratorio), se clasifican de una sola forma, por tratamientos.

b) Efecto de los tratamientos

¿Cómo se mide el efecto de tratamientos?[8]. Es frecuente que el efecto de los tratamientos se mida en función de sus incrementos. Estos incrementos se reflejan en las diferencias de las medias de tratamientos con respecto a la media verdadera, es decir, $\bar{Y}_{..} = \frac{\sum n_i \bar{Y}_{i.}}{N}$, que no es más que una media ponderada de todas las medias de los tratamientos.

En consecuencia, el efecto para el tratamiento i-èsimo lo escribimos como:

$$\tau_{i.} = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} \qquad \text{ec.4.3}$$

Convirtiéndose en el modelo que a continuación se da

$$Y_{i.} = \bar{Y}_{..} + \tau_{i.} + \varepsilon_{ij} \qquad \text{ec.4.4}$$

Lo que nos conduce a la siguiente identidad

$$Y_{ij} = \bar{Y}_{..} + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}) \qquad \text{ec.4.5}$$

Así por ejemplo, la primera observación del ejemplo de los portainjertos de variedades de mandarina, 101, se puede descomponer como:

$$101 = 66.72 + (101 - 66.72) + (101 - 101) = 101$$

4.3 INDICADORES DEL ANÁLISIS

Existen una serie de indicadores relevantes para realizar comparaciones entre muestras o tratamientos, algunos de ellos son:

1º El error estándar de una media de tratamiento es:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{CME} = \sqrt{50.68} = 7.12\text{kg}$$

2º Error estándar de la diferencia entre medias de tratamientos es:

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{2(CME)}{r}} = \sqrt{\frac{2(50.68)}{5}} = 4.50 \text{ kg}$$

Esta fórmula es aplicable cuando el diseño es balanceado, es decir, cuando el número de repeticiones es igual en todos los tratamientos. Si el número de repeticiones es diferente se usa la ecuación

[8] Box, George, y otros, en el libro Estadística para investigadores, explica la forma como se mide.

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{CME(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})} \qquad \text{ec. 4.6}$$

3º El coeficiente de variabilidad:

$$\text{C.V.} = \frac{\sqrt{\text{CME}}}{\bar{\text{X}}} * 100 = \frac{\sqrt{50.68}}{66.72} * 100 \ = 0.1067 * 100 = 10.67\%$$

4.4 PRUEBAS DE SIGNIFICACIÓN

Es importante, antes de sacar conclusiones de los resultados, realizar las pruebas de significación, como herramientas de análisis, las que van a proporcionar las evidencias para las decisiones estadísticas que debemos tomar, frente a un experimento. A continuación, vamos a tratar de manera breve algunas de ellas aplicando a los ejemplos, a fin de hacerlo más ilustrativo, en el capítulo VI se abordará con detalle estas pruebas.

4.4.1 Prueba de *F*.

Esta es una prueba muy necesaria para el investigador, con la finalidad de proporcionarnos una primera conclusión que nos conduce a otras pruebas específicas, que aportan conclusiones. Para tener una mejor visión al estadístico lo llamamos F_c, es la razón entre el cuadrado medio de tratamiento y el cuadrado medio del error, la que podemos escribir como:

$$F_c = \frac{CM \ de \ tratamientos}{CM \ del \ error}$$

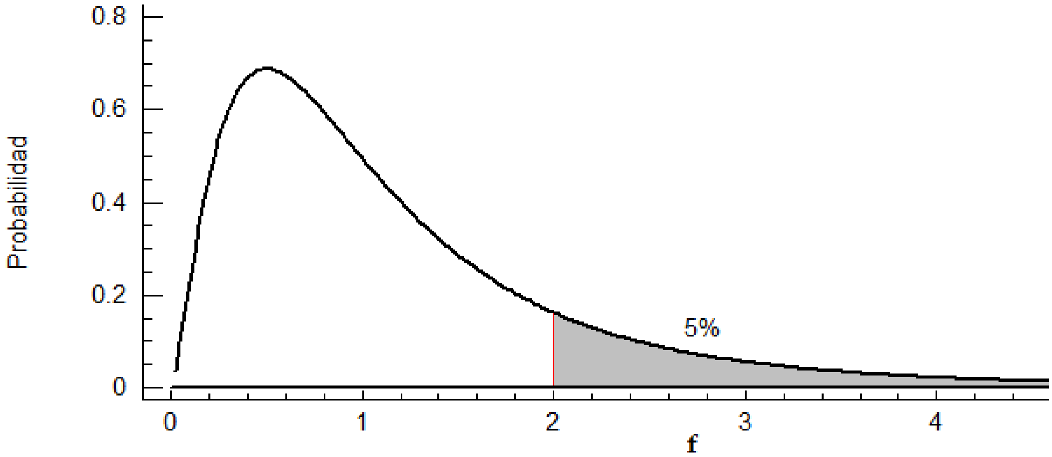
El valor de la razón *F*, en condiciones en la que las muestras de tratamientos provengan de poblaciones iguales, debería ser igual a 1. Sin embargo, al investigador, por el carácter innovador de los experimentos, le interesa tener razones *F* mayores que 1. Pero, ¿en qué casos la razón *F* es 1?, cuando el efecto de los tratamientos es cero ($\tau = 0$). No es suficiente con obtener un valor de $F_c > 1$ para rechazar una hipótesis nula (H_0); sino que, debemos comparar el F_c con un F_t, hallado en la tabla *F* de Fisher, con los grados de libertad de los tratamientos y del error.

Si el valor de F_c calculado supera al $F_{0.05}$, en las conclusiones se dice que la prueba es significativa y se coloca un asterisco(*) en la parte superior derecha del *CM* del tratamiento. Si el nivel de significación especificado es de 1% se dice que es altamente significativo y se denota este resultado con un doble asterisco (**). A pesar de su alto valor para el investigador esta prueba no es específica, más bien es genérica, es decir que el rechazo de la hipótesis nula H_0 no indica entre que tratamientos hay diferencias significativas.

En la figura 4.7, se observa la prueba de Fisher, la región de rechazo a la derecha, con un alfa igual al 5%. Si la F_c cae en la zona de rechazo, (área azulado), entonces la H_0, se decide rechazar, caso contrario no rechazaremos la hipótesis.

Cuando se da este caso, es preferible no continuar con las pruebas de contrastes múltiples, ya que todas las comparaciones deben resultar no significativas.

Fig. 4.7 Distribución F de fisher



4.4.2 **Prueba de *t***

Se recomienda, si la prueba de *F* no es significativa, no realizar ésta, por que resultaría ocioso. En el análisis de varianza, es bueno recalcar que el *CM* del error es la varianza común (S^2) de los tratamientos, Esto ocurre cuando se presenta la homogeneidad de varianzas.
Ya hemos determinado que el error estándar de las diferencias de medias, cuando el número de repeticiones es igual para cada tratamiento, es:

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{2CME}{r}} \qquad \textit{ec. 4.7}$$

Así mismo, el valor de T_c calculado para cada par de tratamientos es:

$$T_c = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{d}}} \qquad \text{ec. 4.8}$$

En la ecuación 4.8, se supone que la diferencia $\mu_1 - \mu_2$, es igual cero, en consecuencia la ecuación puede escribirse como:

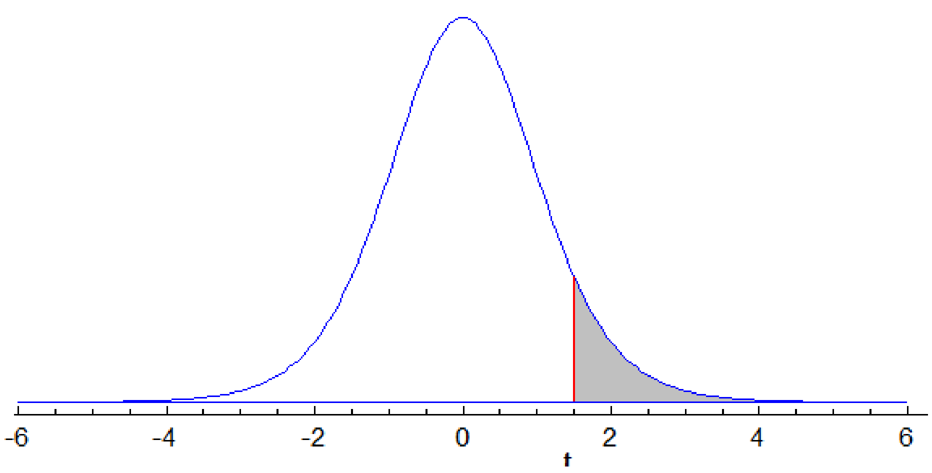
$$T_c = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}{S_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}}{S_{\bar{d}}} \qquad \text{ec. 4.9}$$

La distribución de *t*, es llamada también distribución de Student. Las áreas de probabilidad de la distribución se dan en el anexo *B* de este libro. Para buscar el valor de t_t , se busca en la tabla, con los grados de libertad del error y el nivel de confianza seleccionado α,.
Así en el ejemplo 4.1, cuyos resultados observamos en la tabla 4.6 del ANVA, los grados de libertad del error son 20

La regla de decisión se plantea de la siguiente manera:

Si $T_c > t_t$, se rechaza la hipótesis nula H_0

Fig.4.8 Distribución t de student



DISEÑO COMPLETAMENTE AL AZAR CON TAMAÑO DESIGUAL DE MUESTRA

Ocurren circunstancias en la que por razones fortuitas, aparecen tratamientos con el número de observaciones diferentes entre los niveles de tratamientos o factor bajo estudio. Sin embargo, ante estos hechos, el procedimiento es el mismo, con la debida atención que debemos brindar al realizar los cálculos de las sumas de cuadrados. El esquema se puede presentar como se observa en la tabla 4.7.

El gran total o total general se representa con:

$G = Y.. = \sum Y_{i.}$

Y el número total de observaciones es:

$$N = \sum n_i$$

Para la construcción de la tabla del análisis de varianza se procede calculando:
1º El término de corrección: es el total general al cuadrado dividido por el número total de observaciones

$$TC = \frac{G^2}{N}$$

2º La suma de cuadrados absoluta de todas las observaciones

$$SCT = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n_t} Y_{ij}{}^2 - TC$$

Tabla 4.7 Esquema de un DCA con desigual número de observaciones por tratamiento

Repeticiones por tratamiento	Tratamientos				
	1	2	3	…i…	t
observaciones por tratamiento	Y_{11} Y_{12} Y_{13} . . . Y_{1n_1}	Y_{21} Y_{22} Y_{23} . . . Y_{2n_2}	Y_{31} Y_{32} Y_{33} . . . Y_{3n_3}	Y_{i1} Y_{i2} Y_{i3} . . . Y_{in_i}	Y_{t1} Y_{t2} Y_{t3} . . . Y_{tn_t}
Total tratamiento	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$	$Y_{3.}$	$Y_{i.}$	$Y_{t.}$
Nº de Observaciones	n_1	n_2	n_3	$\dots n_i \dots$	n_t

3º La suma de cuadrado entre tratamientos. El total de cada tratamiento se eleva al cuadrado y se divide por el número de observaciones en cada tratamiento. Éstos se suman y se les resta el término de corrección.

$$SCt = \frac{\sum Y_{i.}^2}{n_i} - TC$$

4º La suma de cuadrado del error. La suma de cuadrados dentro de los tratamientos se obtiene por sustracción, de la siguiente manera.

$$SCE = \left(\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n_t} Y_{ij}{}^2 - TC\right) - (\frac{\sum Y_{i.}^2}{n_i} - TC)$$

$$= SCT - SCt$$

5º Los cuadrados medios entre tratamientos y dentro de tratamientos se obtienen dividiendo la suma de cuadrados por sus correspondientes grados de libertad.

$$CMt = S_T^2 = \frac{SCt}{t-1}$$

$$CME = S_R^2 = \frac{SCE}{\sum n_i - t}$$

Así el cuadro de análisis de varianza es:

Tabla 4.8 Esquema del análisis de Varianza de DCA con
Tamaño desigual de muestra

Fuente de Variabilidad	G.L	S.C.	C.M.	F_c	F_t
Tratamiento	$t-1$	$\sum Y_{i.}^2 - TC$	$\frac{SCt}{t-1}$	$\frac{CMt}{CME}$	* **
Error	$\sum n_i - t$	$SCT - SCt$	$\frac{SCE}{\sum n_i - t}$		
Total	$\sum n_i - 1$	$\sum Y_{ij}^2 - TC$			

Donde $t = número\ de\ tratamientos$
$n_i = número\ de\ elementos\ de\ cada\ tratamiento$
Para ilustrar este caso, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4 Un profesor del curso de estadística de una universidad privada de la localidad hace un comparativo de las calificaciones obtenidos por sus alumnos durante semestres consecutivos pasados. Los estudiantes pertenecen a cuatro carreras de ingenierías distintas, (Civil, electrónica, sistemas, agroindustria) pero el profesor lo administra en forma conjunta. Las calificaciones de los estudiantes se registran en la tabla 4.9. A la luz de estos datos, ¿podemos deducir que las calificaciones de los estudiantes han sido afectadas significativamente por las carreras profesionales?

Los datos del ejemplo 4.4 se presentan en la tabla 4.9, en la que se procedió a asignar a cada carrera profesional, promedios de exámenes de semestres anteriores en forma aleatoria.

Las carreras profesionales que vamos a estudiar se justifican precisamente por la suposición de que los datos recogidos pueden considerarse como muestras aleatorias de cuatro poblaciones normales que poseen la misma varianza y que si difieren en algo es solo en sus medias. Conviene antes de iniciar el análisis, plantearnos la siguiente interrogante, ¿hay evidencias suficientes que indique que existen diferencias reales significativas entre los valores medios de los rendimientos académicos de los estudiantes que provienen de distintas carreras profesionales?. El esquema del ANVA, se presenta en la tabla 4.10

Tabla 4.9 Calificaciones

REPETICIONES	CARRERAS				TOTAL
	1	2	3	4	
1	18	12	12	15	
2	19	14	18	16	
3	15	15	17	17	
4	16	13	16	18	
5	18		14	12	
6	14			17	
7				15	
Total	100.54	77	110	341	
Tamaño de *n*	6	4	5	7	22
$\bar{Y}$	16.67	13.5	15.4	17.71	15.5

Entonces la hipótesis nula en competencia es, que las medias de rendimientos académicos de los estudiantes provenientes de diferentes carreras profesionales, es decir, los tratamientos μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4 son todas iguales, frente a la hipótesis alternativa de que no lo son.

Hipótesis nula: H_0: Las medias de rendimientos de los estudiantes son iguales ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$)

Hipótesis alternativa: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4$ (Por lo menos un rendimiento es diferente)

4.5.1 Estimación de la Variabilidad dentro de tratamientos

La variabilidad dentro de los tratamientos, como ya quedó explicado, es el cuadrado medio del error, cuyo cálculo, procedemos a realizar a continuación:

Tratamiento 1=$18^2 + 19^2 + 15^2 + 16^2 + 18^2 + 14^2 - \frac{100^2}{6} = 19.33$

Tratamiento 2=$12^2 + 14^2 + 15^2 + 13^2 - \frac{54^2}{4} = 5$

Tratamiento 3= $12^2 + 18^2 + 17^2 + 16^2 + 14^2 - \frac{77^2}{5} = 23.2$

Tratamiento 4 = $15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 12^2 + 17^2 + 15^2 - \frac{110^2}{7} = 23.42$

$$\mathrm{SC_R} = \mathrm{SCE} = 19.33 + 5 + 23.2 + 23.42 = 70.95$$

Por lo tanto el $\mathrm{CME} = S_R^2 = \frac{70.95}{18} = 3.942$

4.5.2 Variabilidad entre tratamientos

Viene a ser el cuadrado medio de los tratamientos, como se observa
a continuación

$$SC_T = SCtratamiento = \frac{100^2}{6} + \frac{54^2}{4} + \frac{77^2}{5} + \frac{110^2}{7} - \frac{341^2}{22} = 24.538$$

Entonces el cuadrado medio para tratamientos se calcula mediante:

$$CM_T = \frac{SCt}{t-1} = \frac{24.538}{3} = 8.18$$

Así la tabla de Análisis de varianza es:

Tabla 4.10 Análisis de varianza

Fuentes de variabilidad	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medio	F calculado
Entre tratamientos	3	24.538	8.18	2.08
Dentro de treatamientos	18	70.95	3.94	
Total	21			

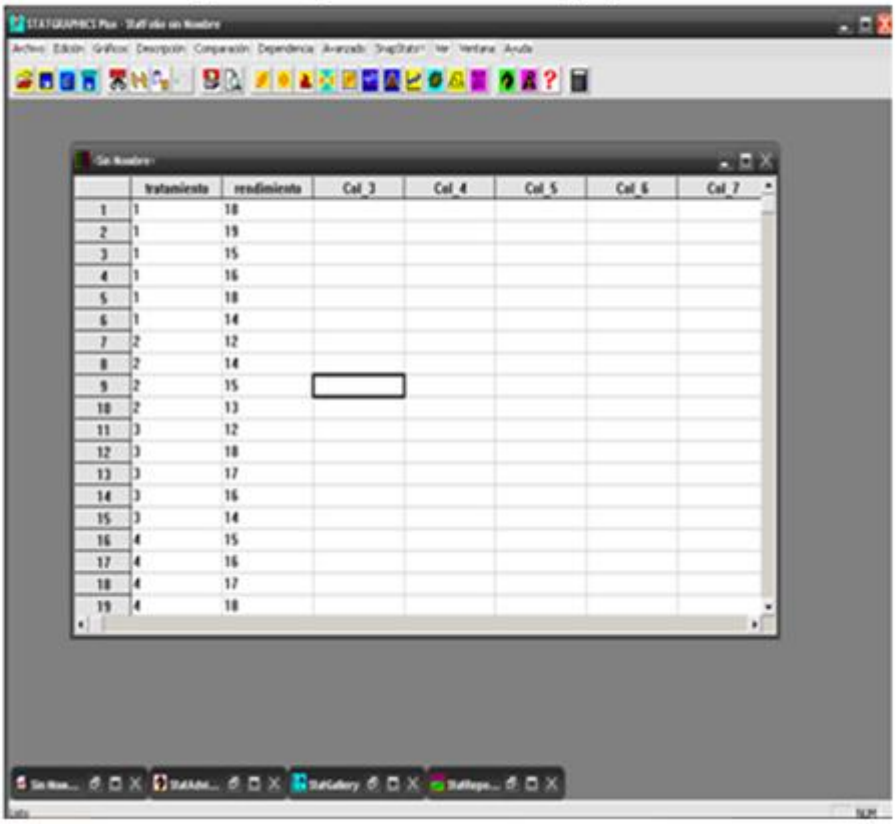
En la tabla del ANVA, se observa que el valor de *F*, muestra que no existe diferencias significativas entre los promedios de rendimiento de las distintas carreras profesionales de la universidad bajo estudio, debido a que el valor de *F*, con 3 y 18 grados de libertad a un nivel del 5% es mayor que el valor de *F* calculado.

A continuación empleamos el paquete statgraphics para el análisis estadístico. En la fig. 4.9 se observa los datos ingresados en el programa.

Resumen del Procedimiento
Variable dependiente: rendimiento
Factor: tratamiento

Número de observaciones: 22
Número de niveles: 4

Fig. 4.9 Hoja de datos del statgraphics



El StatAdvisor

Este procedimiento realiza un análisis de la varianza simple para rendimiento. Realiza varios tests y gráficos para comparar los valores medios de rendimiento para los 4 diferentes niveles de tratamiento. El F-test en la tabla de ANOVA comprobará si hay alguna diferencia significativa entre las medias. Si hay, los Tests de Rangos Múltiples le indicarán las medias que son significativamente diferentes unas de otras. Si le preocupa la presencia de valores atípicos, puede elegir el test Kruskal-Wallis que compara las medianas en lugar de las medias. Los diferentes gráficos le ayudarán a juzgar la significación práctica de los resultados, y le permitirán buscar las posibles violaciones a las asunciones subyacentes en el análisis de la varianza.

Tabla 4.11 ANOVA para rendimiento según tratamiento

Fuente	Sumas de cuadrados	GL	Cuadrado medio	Cociente-F	P-Valor
Entre grupos Intra grupos	24.5381 70.9619	3 18	8.17937 3.94233	2.07	0.1394
Total	95.5	21			

El StatAdvisor

La tabla ANOVA descompone la varianza de rendimiento en dos componentes: un componente entre grupos y un componente dentro de los grupos. El F-ratio, que en este caso es igual a 2,07476, es el cociente de la estimación entre grupos y la estimación dentro de los grupos. Puesto que el p-valor del test F es superior o igual a 0,05, no hay diferencia estadísticamente significativa entre los rendimientos medias de un nivel de tratamiento a otro para un 95,0%.

Fig. 4.10 Representación por nivel de tratamiento

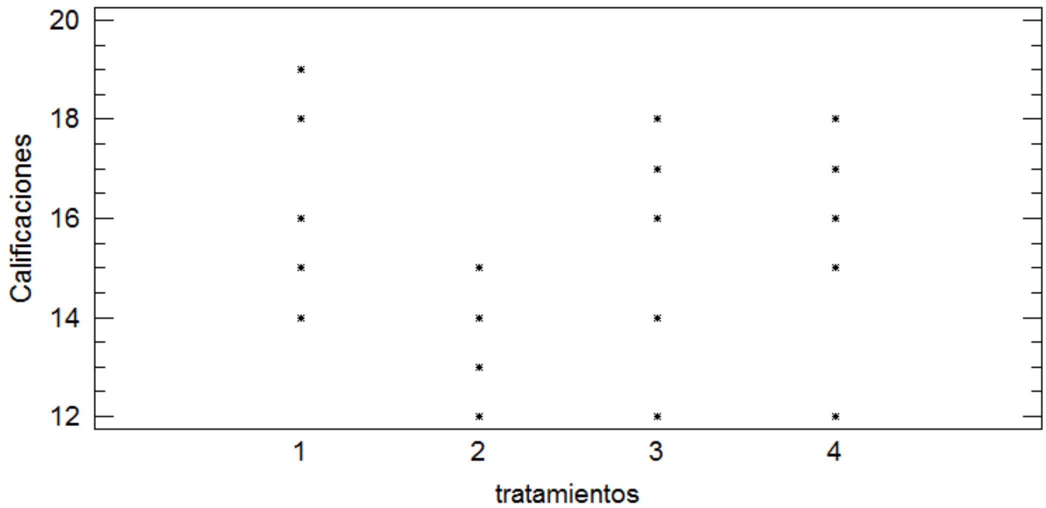


Fig. 4.11 Gráfica de medias

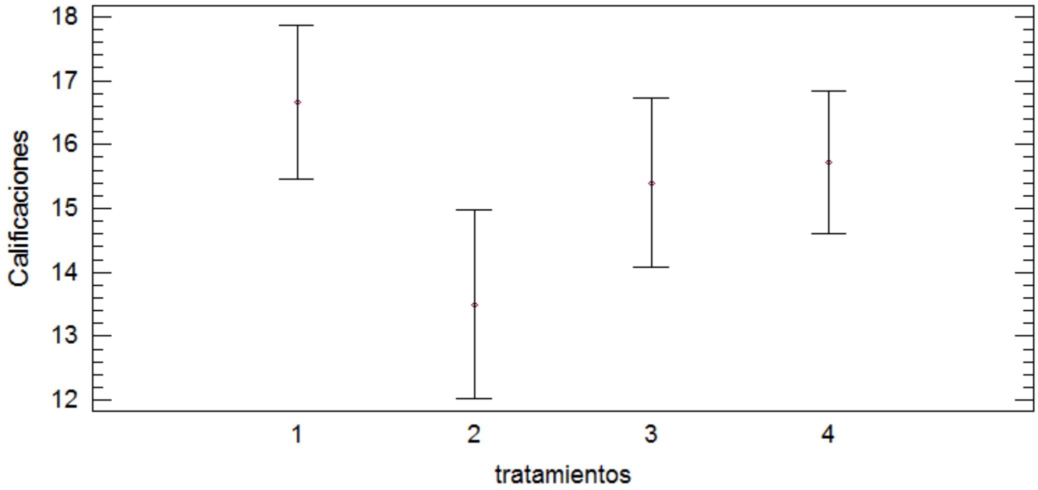
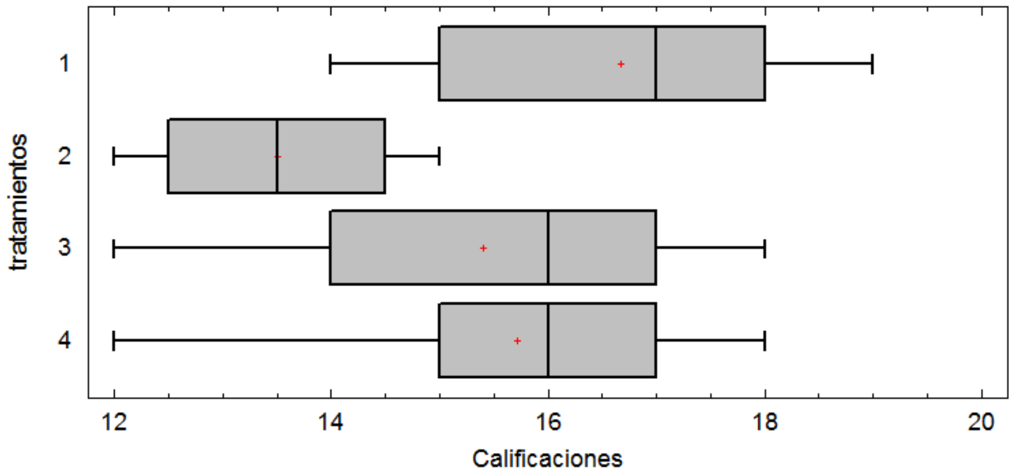


Fig. 4.12 Gráfico de Caja y Bigote



Finalmente se puede concluir después de la revisión amplia que se hizo del diseño completamente al azar, que tendrá mayor utilidad donde no existan fuentes que den origen a las variaciones entre las unidades experimentales. Del mismo modo, este diseño se presenta como el más flexible puesto que permite distribuir las unidades experimentales, con más libertad, en los experimentos de campo y laboratorio, lo mismo que maximiza los grados de libertad los errores experimentales permitiendo reducir la variabilidad dentro de los niveles de tratamientos.

TÉRMINOS CLAVE

Tratamientos
Niveles de tratamientos
Factorial
Homogeneidad
Diseño completamente al azar
Análisis de Varianza
Variabilidad
Suma de cuadrados
Cuadrados Medios

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿El método de análisis de varianza implica solamente una prueba del extremo superior?

2. Señalar los objetivos del experimento.

3. ¿Cuáles son los pasos que se debe seguir en un experimento planeado?

4. Manifestar de acuerdo a la lectura realizado, ¿cuáles son los factores de entrada en un experimento?

5. ¿Cuantas fuentes de variabilidad se observa en un diseño completamente al azar?

6. ¿Cómo se plantean las hipótesis nula y alternativa en el análisis de varianza?

7. Se ha llevado a cabo un experimento bajo un diseño completamente al azar para probar cinco variedades de papa con potencial exportador, con cinco repeticiones por cada tratamiento (variedades). Los datos se presentan en la tabla siguiente, en Tn por hectárea

Variedades				
V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
25	28	24	30	45
28	32	21	35	40
30	35	20	34	46
18	40	20	20	40
17	36	25	22	38

a) ¿Se encuentra alguna diferencia en el rendimiento de las variedades de papa con un nivel de 5%?
b) Determine el intervalo de confianza del 80% para las medias de los tratamientos.

8. En un fundo agrícola del sur del Perú se probaron los rendimientos de cinco razas de ganado lechero, en la cual de empleo 25 animales tratando de homogenizar sus edades y pesos a fin de evitar sesgos en las lecturas. Los datos, en litros por día, se presentan a continuación

Razas				
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
40	15	24	30	45
30	22	21	35	40
30	17	28	34	46
18	14	25	30	40
17	23	25	31	39

a) Realizar la prueba de hipótesis empleando un nivel de significación del 1%, 5% y 10% y manifestar si existe diferencias significativas en las razas lecheras
b) Determinar el intervalo de confianza del 90% para las medias de los tratamientos.

9. En una facultad de educación de una universidad privada se probaron cuatro métodos de lectura veloz, en estudiantes del cuarto año. Los resultados de las pruebas, en palabras por minuto, fueron los siguientes:

Métodos de lectura			
M_1	M_2	M_3	M_4
750	1200	1800	650
620	1000	1820	600
800	1100	1900	500
550	950	2000	950
790	990	1220	940

a) Probar con un nivel de significación del 5% si existe diferencias significativas entre los métodos de lectura veloz.
b) Determinar el intervalo de confianza del 98% para las medias de los tratamientos.

10. En un experimento de campo se han probado cuatro raciones en cuyes, a base de harina de camote en proporciones diferentes. Se han registrado los aumentos de peso(en gramos) después de 25 días, los mismos que se presentan en la siguiente tabla

Pesos(gramos)			
R_1	R_2	R_3	R_4
200	120	180	150
220	100	182	180
210	110	190	110
180	95	200	150
190	90	120	142

a) Empleando un nivel de significación del 1%, ¿existirá diferencias significativas entre las diversas raciones?
b) Estimar el promedio general de los aumentos de peso y los efectos de los tratamientos(raciones)
c) Estimar el intervalo de confianza para las medias de los tratamientos, empleando el 85% de confianza.

11. Se ha llevado a cabo un experimento en un DCA, con desigual número de repeticiones, en la que se comparan los rendimientos de cuatro variedades de aceitunas de mesa (en tn/ha). Los datos registrados se presentan en la tabla siguiente:

Sevillana	Ascolana	Empeltre	Ilo
4.9	8.2	5.6	10.6
8.5	4.7	4.9	9.6
9.4	5.6	5.0	8.7
9.8	6.3	4.7	10.3
7.4	6.4	4.3	9.9
10.5	5.2		8.7
	4.8		

a) Probar si existen diferencias entre las variedades del experimento usando un nivel de significación del 5%
b) Estimar el promedio general de los rendimientos de las variedades y los efectos de los tratamientos.
c) Estimar el intervalo de confianza para las medias de los tratamientos, empleando el 95% de confianza.

12. Un ingeniero agroindustrial está interesado en determinar los efectos de la temperatura de almacenamiento en la conservación de manzanas de exportación. La respuesta en este estudio (variable dependiente) es el número de manzanas que se pudren después de un mes de almacenamiento. Decide usar cuatro temperaturas diferentes (tratamientos) y selecciona 24 compartimientos donde se almacenan las cajas de manzana para realizar la prueba. La variable independiente se fijó en los siguientes niveles:

T_1=temperatura de 5ºC
T_2=temperatura 10ºC
T_3=temperatura de 15ºC

T_4=temperatura de 20ºC

Los resultados después del almacenamiento son:

(n° de manzanas malogradas)

	Temperatura			
Repeticiones	T_1	T_2	T_3	T_4
1	9	6	9	10
2	16	10	10	9
3	11	9	13	8
4	11	8	11	11
5	10	7	9	13
6	12	12	16	18

a) ¿Son significativos los efectos de la temperatura en $\alpha = 0.05$? ¿en $\alpha = 0.01$?
b) Estimar el recuento promedio general del número de manzanas malogradas y los efectos de los tratamientos

13. Un profesor universitario recientemente llegado de una capacitación en el extranjero, desea probar cuatro métodos de enseñanza de lectura veloz en estudiantes de pedagogía. Para este propósito escoge en forma aleatoria 24 alumnos dividido en seis grupos homogéneos. A cada grupo seleccionado le aplica un método de lectura. Al cabo de 30 días realiza la evaluación obteniendo los siguientes resultados(palabras por minuto)

Método			
M_1	M_2	M_3	M_4
600	550	501	760
550	540	520	800
620	420	490	810
645	450	470	850
680	460	500	740
690	440	410	860

Realizar el análisis estadístico comparando los cuatro métodos de lectura, empleando un nivel de significación de 5%. Explicar si existen diferencias estadísticas significativas entre los métodos.

14. En un instituto superior tecnológico se prueban cuatro métodos de enseñanza de la estadística avanzada a cuatro grupos de estudiantes. Al finalizar el proceso se aplica a todos los grupos una prueba estándar. El número de estudiantes para cada método es de seis. ¿Deberá rechazarse la hipótesis nula de que los cuatro métodos de enseñanza son tan efectivos?. Use un nivel de significación de 0.05. Los datos(puntaje centesimal) se muestran a continuación

Método de enseñanza			
I	II	III	IV
70	79	78	80
72	78	79	84
75	80	81	85
74	85	80	86
79	84	79	89
71	77	82	90

15. Si en el experimento de la pregunta 11, se quita 10 unidades a los valores del método I y se añade 10 unidades a los valores del método II. ¿Los resultados de la prueba en el análisis de varianza difieren? Pruebe con un nivel de significación de 0.01.

16. Se ha recogido información referente a cinco muestras de igual tamaño. Se pide probar la hipótesis supuesta, que las cinco medias son iguales empleando un $\alpha = 0.05$

Muestras				
M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
25	11	35	32.	39
35	12	36	31	45
29	10	34	30	41
28	15	38	25	40
27	18	40	23	38

a) Plantear las hipótesis adecuadas
b) Plantear la regla de decisión
c) Manifestar la decisión sobre la hipótesis nula

17. Se realizó un experimento de campo para probar el rendimiento de seis variedades de frijol negro en condiciones de suelo y clima de una región de la costa del Perú. Los registros de rendimiento se observan en la siguiente tabla.

Variedades(Tn/ha)					
V_1	V_2	V_3	V_3	V_4	V_5
6.3	4.1	5.8	3.9	5.8	5.0
6.5	4.3	5.9	4.6	5.9	5.4
6.6	4.0	5.3	5.2	5.4	5.2
6.9	4.5	5.4	3.4	5.7	5.4
7.5	4.1	5.6	4.5	6.2	4.7
6.4	4.3	6.0	4.3	5.9	4.6

a) Plantear las hipótesis nula y alternativa en disputa
b) Plantear la regla de decisión empleando un gráfico como ilustración.
c) Elaborar el análisis de varianza. ¿Las variedades de frijol caraota presentan diferencias significativas?

18. Se llevó a cabo un experimento para probar la aceptación de una marca de cacao procesado, proveniente de cinco valles del Perú. Para tal efecto se convocó a seis expertos en cata de cacao, los mismos que evaluaron las siguientes características: aroma, color, sabor y textura (1 =extremadamente malo, 9= extremadamente bueno)=. Lo datos combinados de los resultados aprecian en la tabla siguiente:

C_A	C_B	C_C	C_D	C_E
23	28	28	32	30
25	28	25	35	27
24	27	26	36	25
22	29	24	34	24
23	30	23	36	24
21	29	24	36	24

a) Realizar el análisis estadístico
b) ¿Puede afirmarse con propiedad que existe algún valle del Perú que produce cacao diferenciado de otros?

19. Si en el problema 18, observa diferencias significativas realizar la prueba de Tukey, con un nivel de significación 5%.

20. A partir de los resultados del problema 18, si encuentra diferencias significativas, realizar la prueba de rangos múltiples de duncan

...

CAPÍTULO V

DISEÑO DE BLOQUES COMPLETOS AL AZAR

En este diseño, los tratamientos se asignan al azar a los bloques o repeticiones. Así mismo, este diseño contempla dos efectos: los efectos principales o de los tratamientos y los efectos de los bloques que son aquéllos que, en la práctica, no interesa al investigador, dado que son efectos que desearíamos sean eliminadas. En la realidad, cuando se diseñan experimentos, los bloques pueden ser: diferentes camadas de animales, diferentes razas, pesos, edades, mezclas químicas, zonas agrícolas, parcelas homogéneas o períodos continuos de tiempo.
El objetivo de este diseño, y particularmente la formación de bloques, es la de mantener la variabilidad entre unidades experimentales dentro de un bloque tan pequeño como sea posible y maximizar las diferencias entre bloques. Si no hay diferencias entre los bloques, este diseño no contribuirá a la precisión para detectar las diferencias de tratamientos.
El procedimiento de aleatorización del diseño, consiste en que cada tratamiento es asignado el mismo número de veces a unidades experimentales dentro de un bloque, usualmente una vez. Sin embargo, ciertos tratamientos pueden repetirse dos o más ocasiones dentro de un bloque, en este caso se trata de diseños con sub muestreo. Por regla general, es más eficiente tener una sola repetición por bloque.

5.1 CARACTERÍSTICAS DEL DISEÑO DE BLOQUES

El Diseño de Bloques completos al azar tiene las siguientes características:
1º Número de restricciones en la aleatorización: 1
2º La naturaleza de la restricción en la aleatorización: un conjunto completo de tratamientos debe ser asignado al azar dentro de cada bloque por separado.
3º La formación de bloques se realiza con el fin de reducir errores en el ensayo. Es preferible que cada bloque sea diferente de otro.

5.2 EL MODELO ESTADÍSTICO

Las observaciones en un diseño de bloques completos al azar aplicando el tratamiento i-ésimo al bloque j-ésimo se escribe como Y_{ij}; la media del bloque j-ésimo $\overline{Y}_{.j}$; la media del tratamiento $i-$ésimo $\overline{Y}_{i.}$; y la media general por $\overline{\boldsymbol{Y}}_{..}$.

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \qquad \text{ec. 5.1}$$

Dónde: μ = media de la población
τ_i: efecto del $i-$ésimo tratamiento$(i = 1 \ldots t)$
β_j: efecto del $j-$ésimo bloque $(j = 1 \ldots b)$
ϵ_{ij}: variación al azar de la $i-$ésima $j-$ésima unidad experimental

Tabla 5.1 Resultado general de un Bloque Completo al Azar

Bloque	Tratamiento				Total bloque	Media Bloque
	1	*2*	*…i…*	*t*		
1	Y_{11}	Y_{21}	$...Y_{i1}...$	Y_{t1}	$Y_{.1}$	$\bar{Y}_{.1}$
2	Y_{12}	Y_{21}	$...Y_{i2}...$	Y_{t2}	$Y_{.2}$	$\bar{Y}_{.2}$
.	.				.	.
.	.				.	.
.	.				.	.
J	Y_{1j}	Y_{2j}	$...Y_{ij}...$	Y_{tj}	$Y_{.j}$	$\bar{Y}_{.j}$
.	.				.	.
.	.				.	.
.	.				.	.
b	Y_{1b}	Y_{2b}	$...Y_{ib}...$	Y_{tb}	$Y_{.b}$	$\bar{Y}_{.b}$
Total tratamiento	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$	$...Y_{i.}...$	$Y_{t.}$	$Y_{..}$	
Media tratamiento	$\bar{Y}_{1.}$	$\bar{Y}_{2.}$	$...\bar{Y}_{i.}...$	$\bar{Y}_{t.}$		$\bar{Y}_{..}$

En consonancia con el modelo matemático del diseño de bloques completos está la descomposición de las siguientes observaciones:

$$Y_{ij} = \bar{Y} + \left(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}\right) + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}) \qquad \text{ec 5.2}$$

El último término, $(Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y})$, se denomina residuo debido a que representa lo que queda después de haber tenido en cuenta la media general, las diferencias de bloques y diferencias de tratamiento.

Bajo la premisa del modelo, suponemos que una observación Y_{ij} puede representarse como la suma de una media μ, un efecto de tratamiento τ_i, un efecto de bloque β_j, y un error ϵ_{ij} . En la tabla 5.1, se ilustra la tabla de resultados de un experimento de bloques completos al azar

5.3 DISTRIBUCIÓN AL AZAR DE LOS TRATAMIENTOS

En la fase de planeamiento del experimento, se distribuyen las parcelas a lo largo de todos los bloques. Posteriormente, los tratamientos se asignan en forma aleatoria a cada unidad experimental, tal como se observa en la fig 5.1, cuyo diseño consta de cuatro bloques y cuatro tratamientos. Los cuatro tratamientos fueron aleatoriamente asignados. Se puede usar en estos casos la tabla de números aleatorios, o puede hacerse en forma artesanal, pero sin ninguna preferencia, de la siguiente manera: confeccionando dos recipientes o bolsas que contienen cuatro números, 1, 2, 3 y 4 que corresponde a cada unidad experimental por bloque y en otro recipiente colocamos el código de los tratamientos: *A, B, C, y D*. Luego extraemos un número del primer recipiente y una letra del segundo recipiente, tal como se observa en dicha figura, (1,B), (2, A), (3,D) y (4,C). Para el segundo bloque se procede de la misma forma, hasta completar la totalidad de las unidades experimentales.

Fig 5.1 Diseño de Bloques completos al azar con cuatro tratamientos

BLOQUES

I	II	III	IV
B	C	C	D
A	D	B	C
D	B	A	B
C	A	D	A

Es importante agregar, que todos los tratamientos en un experimento de esta naturaleza, deben estar replicados el mismo número de veces en cada bloque. Así mismo, el número de tratamientos está limitado solamente por el tamaño del bloque, que a su vez depende de la variabilidad del material experimental. Del mismo modo, el número de bloques, a su vez, está limitado por la disponibilidad del material experimental, el costo y por las facilidades para el manejo del experimento. En general, se requieren por lo menos de dos repeticiones para proceder a realizar pruebas de significación, puede exceptuarse de esta obligación, cuando se tiene un arreglo factorial y puede usarse menos de dos bloques.

5.4 VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL DISEÑO DE BLOQUES COMPLETOS AL AZAR

Después de analizar los argumentos de este diseño, describiremos las ventajas que proporciona el diseño de bloques

5.4.1 VENTAJAS

1º Precisión. Es decir, Cochran[9], afirma que se requerirán por lo menos 10 repeticiones en un diseño completamente al azar para obtener una cantidad de información igual a la obtenida por un Diseño de Bloques completos al azar con seis repeticiones.

2º Es simple. Resulta fácil de planificar

[9] Del libro, Diseños Experimentales

3º Cuando hay casos de datos perdidos, esto no causa mayores dificultades en el análisis, debido a que pueden ser fácilmente estimados.
4º Es flexible. Este carácter está referido a que los tratamientos y repeticiones se pueden adecuar de acuerdo a las características del experimento.
5º Fácil de analizar. El análisis estadístico es sencillo y no presenta mayores complicaciones.
6º Es el diseño más usado, es especialmente adecuado para experimentos en el campo. Puede aplicarse en variedad de problemas en diversos campos de la investigación.
7º Se usa apropiadamente para controlar el error experimental en casos donde los bloques son: días de la semana, expertos, porciones de material, animales, chiqueros, pacientes, escuelas, laboratorios, hornos, métodos, etc.

5.4.2 DESVENTAJAS

1º No se aconseja su uso cuando el número de tratamientos es grande y la variabilidad de las unidades experimentales dentro del bloque es considerable.
2º En experimentos de campo, la variabilidad del suelo no siempre ocurre en la dirección ideal para formar bloques en forma efectiva.
3º No es adecuado cuando los tratamientos interaccionan con los bloques

5. 5 ESQUEMA DEL ANÁLISIS DE VARIANZA

En la tabla 5.2, se presenta el modelo del análisis de varianza para un diseño de bloques completos al azar, en la que se observa que la fuente de variabilidad se descompone en tres componentes de variabilidad; entre bloques, entre tratamientos y dentro de tratamiento o error experimental. Observe que, en el caso de los grados de libertad sucede algo similar, dado que se descompone en las tres fuentes de variabilidad señalada cuya suma resulta igual a los grados de libertad total.

Tabla 5.2 Análisis de Varianza de un DBCA

Fuente de variabilidad	G.L.	S.C.	C.M.	F_c	F_t
Tratamiento	$t-1$	$\frac{\sum Y_{i.}^2}{b} - TC$	$\frac{SCt}{t-1}$	$\frac{CMt}{CME}$	* **
Bloque	$b-1$	$\frac{\sum Y_{.j}^2}{t} - TC$	$\frac{SCB}{b-1}$		
Error	$(t-1)(b-1)$	$SCT - SCt - SCB$	$\frac{SCE}{(t-1)(b-1)}$		
Total	$bt-1$	$\sum Y_{ij}^2 - TC$			

*Significativo ** Altamente significativo

De la tabla 5.2, puede describirse los símbolos que se emplean:

t: $N^{\underline{o}}$ de $tratamientos$
b: $número$ de $bloques$
TC: $término$ de $corrección$
SCT: $suma$ de $cuadrado$ de $totales$
SCt: $suma$ de $cuadrado$ de $tratamientos$
SCB: $suma$ de $cuadrado$ de $bloques$
SCE: $suma$ de $cuadrado$ del $error$

El método general de cálculo está en armonía con el modelo, se procede como se observa a continuación:

El primer valor en calcular es lo que llamamos el término de corrección que podemos simbolizarlo como, TC

1° Término de corrección

$$\mathrm{TC} = \frac{\mathrm{Y}_{..}^2}{\mathrm{bt}}$$

2° Suma de cuadrado de Totales

$$\mathrm{SCT} = \sum \mathrm{Y}_{\mathrm{iJ}}^2 - \mathrm{TC}$$

3° Suma de cuadrado de tratamientos

$$\mathrm{SCt} = \frac{\sum \mathrm{Y}_{\mathrm{i.}}^2}{\mathrm{b}} - \mathrm{TC}$$

4° Suma de cuadrado de bloques

$$SCB = \frac{\sum Y_{.j}^2}{t} - TC$$

5° Suma de cuadrado del error

$$SCE = SCT - SCt - SCB$$

Ejemplo 5.1 Se ha conducido un experimento en la cual se desea investigar la producción de Ají paprika con fines de exportación, a diferentes niveles de fertilización. Se ha observado que el terreno donde se llevará a cabo la experiencia, presenta cierta pendiente, lo que hace suponer que tienen una gradiente de fertilidad natural. Por esta razón, el experimento se llevó a cabo en un diseño de bloques completos al azar, a fin de eliminar las posibles variaciones de un block a otro, en la comparación de los tratamientos. Se cuenta con suficiente material experimental para llevar a cabo el experimento con cuatro

niveles de fertilización, es decir, cuatro tratamientos ($t = 4$) y cinco bloques o parcelas ($b = 5$).
En la tabla 5.3, se muestra las observaciones registradas, en toneladas por hectárea, las medias de bloques, de tratamientos y la media general

Tabla 5.3 Resultados registrados de producción de ají paprika en un diseño de bloques completos al azar(Tn/ha)

Bloque	Tratamiento A	B	C	D	Total Bloque	Media General
I	4.5	6.5	6.0	7.5	24.5	6.125
II	5.0	6.9	5.8	8.2	25.9	6.475
III	5.2	5.9	6.4	7.1	24.6	6.150
IV	4.7	6.0	6.8	8.5	26.0	6.500
V	5.2	6.3	6.1	9.2	26.8	6.700
Total trata	24.6	31.6	31.1	40.5	127.8	
Media Tra	4.92	6.32	6.22	8.1		6.39

5.5 MODELO DE BLOQUES CON DESCOMPOSICIÓN DE LAS OBSERVACIONES

De acuerdo a la definición de este diseño, una observación registrada aplicando el tratamiento i-ésimo al bloque j-ésimo se puede representar en forma simbólica como Y_{ij}; la media del tratamiento i-ésimo,$\bar{Y}_{i.}$ y la media general como $\bar{Y}_{..}$

De acuerdo al modelo matemático presentado en la ec. 5.1, suponemos que una observación registrada puede representarse como la suma de una media general, un efecto de bloque, un efecto de tratamiento y un error, vale decir:

$$Y_{ij} = \mu + \beta_j + \tau_i + \epsilon_{ij} \qquad \text{ec. 5.3}$$

La misma que se puede descomponer como se aprecia seguidamente:

$$Y_{ij} = \bar{Y} + (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{..})$$

El último término en la descomposición $(Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{..})$ es el residuo, por ser lo último que queda después de haber tenido en cuenta la media general, las diferencias de bloques y las diferencias de los tratamientos.

La descomposición del conjunto de datos de la producción de ají paprika se muestra en la tabla 5.5

5.6.1 Suma de cuadrados y grados de libertad

Las sumas de los cuadrados son las sumas de los cuadrados de los elementos que aparecen en las matrices de la tabla 5.4. Así por ejemplo, en la mencionada tabla se tiene:

$$SC\ Totales = 4.5^2 + 5.0^2 + 5.2^2 + \cdots + 7.1^2 + 8.5^2 + 9.2^2 = 846.62$$

$$SCMedia = 6.39^2 + 6.39^2 + 6.39^2 + \cdots + 6.39^2 + 6.39^2 + 6.39^2 = 816.64$$

$$SCBloque = 0.265^2 + 0.085^2 + 0.24^2 + \cdots + 0.24^2 + 0.11^2 + 0.31^2 = 0.973$$

$$SC\ Tratam = 1.47^2 + 1.47^2 + 1.47^2 + \cdots + 1.71^2 + 1.71^2 + 1.71^2 = 25.594$$

$$SC\ Residuos = 0.155^2 + 0.005^2 + 0.52^2 + \cdots + 0.76^2 + 0.29^2 + 0.79^2 = 3.411$$

Como se describe en la tabla 5.5, el número de grados de libertad es igual al número de elementos que se pueden seleccionar arbitrariamente. Así por ejemplo, en la columna "desviación de bloques" hay $b = 5$ desviaciones de las medias de bloques respecto de la media general. Sin embargo, solamente 4 de estas pueden seleccionarse arbitrariamente, dado que la suma debe ser igual a cero. De la misma forma, sólo $t - 1 = 3$ de las cuatro desviaciones de los tratamientos pueden seleccionarse arbitrariamente. Finalmente, teniendo en cuenta que cada columna y fila de la matriz de residuos debe sumar cero, sólo $(b - 1)(t - 1) = (4)(3) = 12$ de éstos pueden seleccionarse arbitrariamente.

5.6.2 Aditividad de sumas de cuadrados y grados de libertad

De acuerdo al modelo de análisis de varianza presentado en la tabla 5.2, las sumas de cuadrados y los grados de libertad se recogen en la tabla 5.4 del ANVA proporcionado por el paquete statgraphics. Observe la aditividad en las sumas de cuadrados y grados de libertad. Suma de cuadrados ($29.978 = 0.973 + 25.594 + 3.411$), y grados de libertad ($19 = 4 + 3 + 12$)

Tabla 5.4 Análisis de varianza para producción:
Sumas de cuadrados tipo III

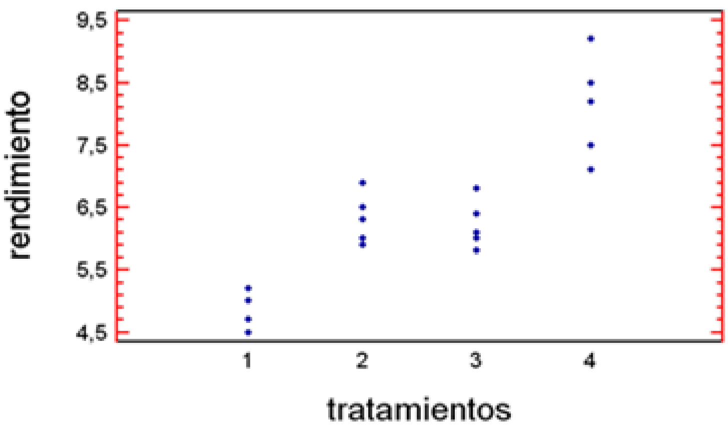
Fuente	Suma de cuadrados	G.L.	Cuadrado medio	Cociente-F	P-valor
EFECTOS PRINCIPALES					
A: bloques	0.973	4	0.24325	0.86	0.5173
B: tratamientos	25.594	3	8.53133	30.01	0.0000
Residuos	3.411	12	0.28425		
Total(Corregido)	29.978	19			

Esto es, las fuentes de variabilidad que presenta la tabla 5.5, la misma refleja que la suma de cuadrados de los totales, es igual a la suma de cuadrados de los bloques más la suma de cuadrado de los tratamientos más la suma de los residuos o error. En este caso se emplea un factor de corrección lo que hace posible tener una suma de totales corregida mediante el factor de corrección.

5.6.3 Representación gráfica de los resultados del experimento

Es importante en todo análisis representar los resultados del experimento mostrando el desempeño de los tratamientos. Así, en la fig 5.2, se tiene la del conjunto de valores de rendimiento de ají por cada uno de los tratamientos. Se observa, por ejemplo, que dentro de los tratamientos, el tratamiento 1 presenta menor variabilidad, puesto que los datos están muy cercanos entre ellos, mientras que dentro del tratamiento 4, se observa que los datos están muy dispersos.

Fig. 5.2 Gráfico de datos por nivel de tratamiento



En la fig. 5.3, puede notarse que las medias de los tratamientos que aparecen en cada bloque, presentan diferencias especialmente la media del tratamiento 1 y 5 mientras que 2 y 3 presentan pocas diferencias entre sí, lo que ratifica que en la prueba del ANVA se encuentran diferencias estadísticas significativas, es decir, las medias de tratamientos no son iguales, por lo que la decisión del investigador, es rechazar la hipótesis nula planteada al inicio del experimento.

En la fig. 5.4 se muestra los residuos para cada tratamiento la misma que indica ausencia de observaciones atípicas.

Fig. 5.3 Medias de tratamientos

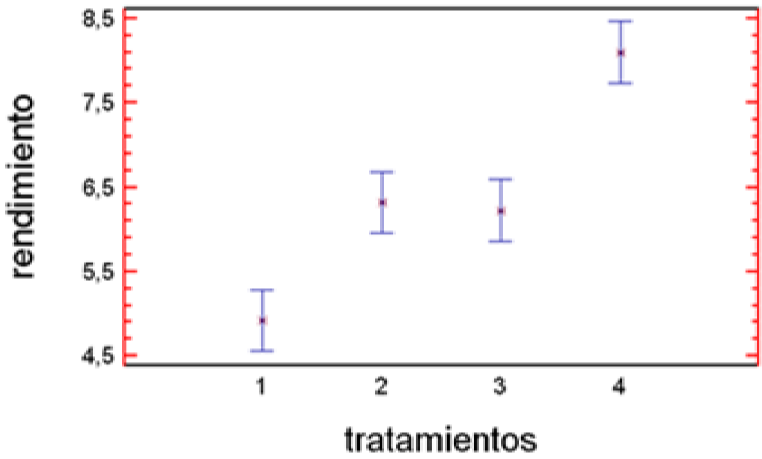


Tabla 5.5 Descomposición de las observaciones para el diseño de bloques completos al azar. Ejemplo de producción de ají

	Media general	Desviación de bloques	Desviación de Tratamientos	Residuos
Y_{ij}	$\bar{Y}_{..}$	$(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})$	$(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})$	$(Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{..})$

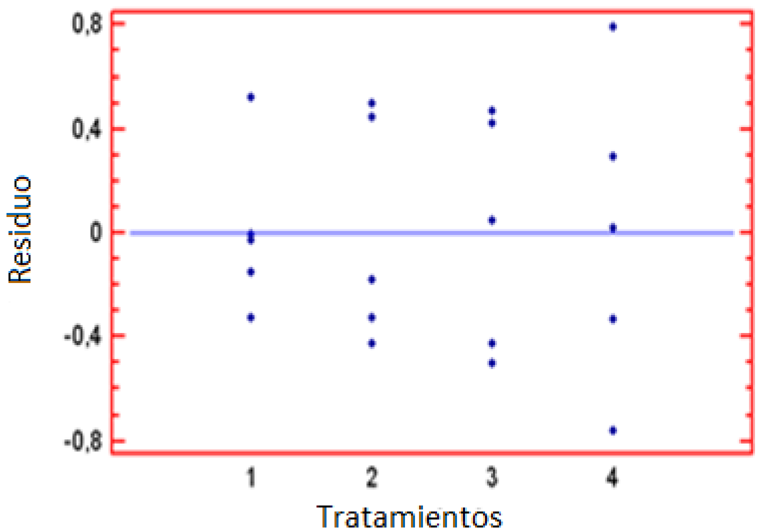
$$\begin{bmatrix} 4.5 & 6.5 & 6.0 & 7.5 \\ 5.0 & 6.9 & 5.8 & 8.2 \\ 5.2 & 5.9 & 6.4 & 7.1 \\ 4.7 & 6.0 & 6.8 & 8.5 \\ 5.2 & 6.3 & 6.1 & 9.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.39 & 6.39 & 6.39 & 6.39 \\ 6.39 & 6.39 & 6.39 & 6.39 \\ 6.39 & 6.39 & 6.39 & 6.39 \\ 6.39 & 6.39 & 6.39 & 6.39 \\ 6.39 & 6.39 & 6.39 & 6.39 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.265 & -0.265 & -0.265 & -0.265 \\ -0.085 & -0.085 & -0.085 & -0.085 \\ -0.24 & -0.24 & -0.24 & -0.24 \\ 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 \\ 0.31 & 0.31 & 0.31 & 0.31 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.47 & -0.07 & -0.17 & 1.71 \\ -1.47 & -0.07 & -0.17 & 1.71 \\ -1.47 & -0.07 & -0.17 & 1.71 \\ -1.47 & -0.07 & -0.17 & 1.71 \\ -1.47 & -0.07 & -0.17 & 1.71 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.155 & 0.445 & 0.045 & -0.335 \\ -0.005 & 0.495 & -0.505 & 0.015 \\ 0.52 & -0.18 & 0.420 & -0.76 \\ -0.33 & -0.43 & 0.47 & 0.29 \\ -0.03 & -0.33 & -0.43 & 0.79 \end{bmatrix}$$

Suma	SCT	=	S_u	+	SCB	+	SCt	+	SCE
De cuadrado	846.62	=	816.64	+	0.973	+	25.594	+	3.41
Grados de Libertad	20	=	1	+	4	+	3	+	12

El StatAdvisor

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de producción en las contribuciones debidas a varios factores. Puesto que se ha elegido la suma de cuadrados Tipo III (valor por defecto), se ha medido la contribución de cada factor eliminando los efectos del resto de los factores. Los P-valores comprueban la importancia estadística de cada uno de los factores. Dado que un p-valor es inferior a 0,05, este factor tiene efecto estadísticamente significativo en producción para un 95,0%.

Fig. 5.4 Gráfico de residuos para rendimiento



En la tabla 5.6 se muestran las cantidades fundamentales de la descomposición ya expuesta. La descomposición que corresponde a un diseño de bloques completos al azar con *b* bloques y *t* tratamientos. El contenido de la tabla está formado por los residuos, adornado por las desviaciones de las medias de los tratamientos y bloques respecto de la media general.

Tabla 5.6 Tabla de residuos y desviaciones de tratamientos
y bloques del experimento de producción de ají

Bloques	Residuos de tratamientos				Diferencias de medias de bloques
	A	B	C	D	
I	-0.155	0.445	0.045	-0.335	-0.265
II	-0.005	0.495	-0.505	0.015	0.085
III	0.52	-0.18	0.42	-0.76	-0.24
IV	-0.33	-0.43	0.47	0.29	0.11
V	-0.03	-0.33	-0.43	0.79	0.31
Diferencias de medias de tratamientos	-1.47	-0.07	-0.17	1.71	$\bar{\bar{y}}_{..} = 6.39$

5.6.4 Valores estimados de las observaciones

Una información complementaria pero a la vez importante es la estimación de las observaciones $\hat{Y}_{ij}$ las mismas que se obtienen añadiendo al promedio general, en nuestro ejemplo, 6.39, las desviaciones de bloques y tratamientos respecto de la media general, mediante la siguiente ecuación:

$$\hat{Y}_{ij} = \bar{Y}_{..} + (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) \qquad \text{ec. 5.4}$$

Los valores estimados se pueden observar en la tabla 5.7. Estos valores son aquellos lo que esperamos lograr en condiciones ideales del experimento.

Tabla 5.7 Tabla de valores estimados para la producción de ají.

Bloque	Tratamientos			
	A	B	C	D
I	4.655	6.055	5.955	7.835
II	5.005	6.405	6.305	8.185
III	4.68	6.08	5.98	7.86
IV	5.03	6.43	6.33	8.21
V	5.23	6.63	6.53	8.41

5.6.5 Eliminación de los efectos de Bloque

Un criterio importante es independizar los valores de los rendimientos del ají de los efectos de bloques y tratamientos. Para eliminar los efectos de bloque se calculan las diferencias de las medias de bloques y la media general, mediante,$(\bar{Y}_b - \bar{Y}_G)$, luego estas diferencias sustraemos de cada elemento del bloque.

Así por ejemplo, los efectos de bloques son: para el bloque I, $6.125 - 6.39 = -0.265$; bloque II, $6.475 - 6.39 = 0.085$; bloque III, $6.150 - 6.39 = -0.24$; bloque IV, $6.5 - 6.39 = 0.1$; bloque V, $6.7 - 6.39 = 0.31$. Si sustraemos estos valores a cada elemento de los bloques en la tabla 5.3, se obtienen, los datos de la tabla 5.8. Ilustremos los valores para el caso del bloque I

$4.5 - (-0.265) = 4.765$
$6.5 - (-0.265) = 6.765$
$6.0 - (-0.265) = 6.265$
$7.5 - (-0.265) = 7.765$

La eliminación de los efectos de bloque de los datos presentados en la tabla 5.3, da origen a la tabla 5.8. En esta tabla, podrá notar, que todas las medias de los bloques son iguales a la media general, 6.39, permaneciendo iguales las medias de tratamientos.

Tabla 5.8 Eliminación de los efectos de bloque

Bloque	Tratamiento 1	2	3	4	Total	Media
I	4.765	6.765	6.265	7.765	**24.5**	**6.39**
II	4.915	6.815	5.715	8.115	**25.9**	**6.39**
III	5.44	6.14	6.64	7.34	**24.6**	**6.39**
IV	4.59	5.89	6.69	8.39	**26.0**	**6.39**
V	4.89	5.99	5.79	8.89	**26.8**	**6.39**
Total Tratamiento	**24.6**	**31.6**	**31.1**	**40.5**	**127.8**	
Media Tratamiento	**4.92**	**6.32**	**6.22**	**8.1**		**6.39**

5.6.6 Eliminación de los efectos de tratamiento
Para eliminar los efectos de tratamiento se procede como en el caso de bloques, calculando los efectos de tratamiento, mediante, $(\bar{Y}_t - \bar{Y}_G)$. Los efectos de tratamiento se sustraen de los elementos de cada tratamiento de la tabla 5.8
Los efectos de tratamientos son:

$4.92 - 6.39 = -1.47$
$6.32 - 6.39 = -0.07$
$6.22 - 6.39 = -0.17$
$8.1 - 6.39 = 1.71$

Seguidamente se procede a eliminar los efectos de tratamiento de los datos de la tabla 5.8, para dar origen a la tabla 5.9, denominado tabla de valores individuales corregidos libre de efectos de bloque y tratamiento, haciendo.

$$4.765-(-1.47)=6.235$$
$$4.915-(-1.47)=6.385$$
$$5.44-(-1.47)=6.91$$
$$4.59-(-1.47)=6.06$$
$$4.88-(-1.47)=6.35$$

Que son los valores individuales del tratamiento. En lo referente al tratamiento 1, cuyo resultado se observa en la tabla 5.9, se emplea el efecto -1.47, seguidamente se realiza para eliminar el efecto del segundo tratamiento, empleando el -0.07 , para el tercer tratamiento, -0.17 y para el cuarto tratamiento, 1.71. El procedimiento es similar en todos los casos.

Sin embargo, subsiste una variabilidad que no está asociada a los efectos de bloque y tratamiento que se debe a la naturaleza de los datos, la misma que recibe el nombre de error experimental, en el cuadro del ANVA se identifica como la suma de cuadrado del error

Tabla 5.9 Datos individuales libre de efecto de bloque y tratamiento

Bloque	Tratamiento 1	2	3	4	Total	Media
I	6.235	6.835	6.435	6.055	25.56	6.39
II	6.385	6.885	5.885	6.405	25.56	6.39
III	6.91	6.21	6.81	5.63	25.56	6.39
IV	6.06	5.96	6.86	6.68	25.56	6.39
V	6.35	6.06	5.96	7.18	25.56	6.39
Total Tratamiento	**31.95**	**31.95**	**31.95**	**31.95**	**127.8**	
Media Tratamiento	**6.39**	**6.39**	**6.39**	**6.39**		**6.39**

A partir de la tabla 5.9 se calcula el error experimental

$$\text{CME}=\frac{\sum(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})^2}{(\boldsymbol{bt}-\mathbf{1})-(\boldsymbol{b}-\mathbf{1})-(\boldsymbol{t}-\mathbf{1})}=\frac{(6.235-6.39)^2+(6.385-6.39)^2+\cdots+6.68-6.39)^2+(7.18-6.39)^2}{(20-1)-(5-1)-(4-1)}$$

$$=\frac{3.4431}{12}=0.2869$$

5.7 USO DE LA TABLA DE ANÁLISIS DE VARIANZA

En el ejemplo que estamos desarrollando, el análisis de los residuos no explica mucho. Por esta razón, continuaremos con el análisis con la hipótesis de que los requisitos teóricos se cumplen aproximadamente. Las sumas de cuadrados y los grados de libertad se dieron en la tabla 5.5.
Si suponemos el modelo aditivo de la ecuación 5.1 con las bt cantidades, ϵ_{ij}, como muestra de variables aleatorias distribuidas independientemente, cada una con media 0 y varianza σ^2, el valor esperado del *CM* de los residuos S_R^2, es igual a σ^2, independientemente de las magnitudes de los efectos de tratamiento y bloque. Si la hipótesis nula fuera cierta, el valor esperado de la media de los cuadrados de tratamientos S_T^2, también sería igual a σ^2.

Por otro lado, si las medias de todos los tratamientos difieren y suponemos además que la distribución de los errores es normal o bien si consideramos el problema como una aplicación de la teoría de la aleatorización, podemos contrastar la hipótesis nula de que todas las medias de los tratamientos son iguales repitiendo el cociente $\frac{S_T^2}{S_R^2}$, que la distribución de F con $t-1=3$ grados de libertad y $(b-1)(t-1)=12$ grados de libertad.
En nuestro ejemplo de la producción de ají, el cociente es: $\frac{8.53133}{0.28425}=30.01$, comparado con el valor de la tabla de F con 3 y 12 grados de libertad se observa que, este valor es 3.49, lo que nos indica que los datos contradicen la hipótesis de que la media de los cuatro tratamientos son todos iguales. Así, los cuatro tratamientos diferentes (niveles de fertilización en la producción de ají) han mostrado estadísticamente diferentes producciones. La variabilidad observada entre las medias de los tratamientos no es atribuida al azar, sino al desempeño de los niveles de fertilización. Un contraste similar para estudiar las diferencias de los tratamientos dentro de los bloques no se justifica.

5.8 DATOS PERDIDOS

5.8.1 Experimentos con un dato perdido

Algunas veces ocurren accidentes en los experimentos, especialmente en la fase de gabinete, que por múltiples razones se pierden datos que es necesario recalcularlos. Vamos recurrir al procedimiento descrito por Yates[10].
En la tabla siguiente 5.10 simularemos una tabla de datos de un experimento conducido en bloques completos al azar, en la cual se registran los datos del experimento y cuyo 3er tratamiento y 1er bloque aparece perdido, por lo que se reemplaza con una letra *Y*. En la citada tabla; *G*, es el gran total; *T*, total del tratamiento perdido; *B*, Total de bloque perdido

Tabla 5.10 Esquema de un experimento de bloques completos
al azar con un dato perdido

[10] CochranII y Cox, describen el procedimiento, en su libro Diseños experimentales

Bloques	Tratamientos				Total de bloques
	1	2	3	4	
I	.	.	Y	.	B+Y
II	.	.	.	.	
II	.	.	.	.	
IV	.	.	.	.	
Total tratamiento			T+Y		G+Y

Para calcular el valor perdido procederemos a usar el método de los mínimos cuadrado, partiendo de la siguiente ecuación:

$SCE = SCTotal - SCTrat - SCBloq + TC$

Seguidamente se plantean las ecuaciones para cada término de la ecuación anterior, con datos de la tabla 5.10

1º $TC = \frac{(G+Y)^2}{bt}$

2º $SCTotal = \cdots Y^2$ …

3º $SCTrat = \cdots \frac{(T+Y)^2}{b}$ …

4º $SCBloques = \cdots \frac{(B+Y)^2}{t}$ …

Entonces la suma de cuadrado del error, queda planteado como:

$$SCE = Y^2 - \frac{(T+Y)^2}{b} - \frac{(B-Y)^2}{t} + \frac{(G+Y)^2}{bt}$$

Se busca la primera derivada de toda la ecuación con respecto a Y, luego igualamos a cero, como se observa a continuación

$$\frac{\partial(\text{SCE})}{\partial y} = 2Y - 2\frac{(T+Y)}{b} - 2\frac{(B+Y)}{t} + 2\frac{(G+Y)}{bt}$$

$$2Y - 2\frac{(T+Y)}{b} - 2\frac{(B+Y)}{t} + 2\frac{(G+Y)}{bt} = 0$$

mcd=bt

$$2btbY - 2t(T+Y) - 2b(B+Y) + 2(G+Y) = 0$$

$btbY - t(T+Y) - b(B+Y) + (G+Y) = 0$

$btY - tY - bY + Y = tT + bB - G$

Entonces: $Y(bt - t - b + 1) = tT + bB - G$

Despejando Y, queda:$Y = \frac{tT+bB-G}{bt-t-b+1}$

Factorizando en el denominador: $Y = \frac{tT+bB-G}{(b-1)(t-1)}$ ec.5.5

En la cual B es el total de las unidades restantes en el bloque, al que pertenece la unidad perdida, T es el total de rendimientos del tratamiento al que pertenece la unidad perdida, G es el gran total; b y t son el número de repeticiones y tratamientos respectivamente.

En cuanto al análisis de varianza, esto se procede a calcular como de costumbre, con la única diferencia que los grados de libertad del error se disminuyen en una unidad, así como los grados de libertad del total.

Ejemplo 5.2 Se lleva a cabo un experimento de campo, en un diseño de bloques completos al azar, en la que se desea probar cinco variedades de papa. Accidentalmente en los registros anotados desapareció un dato. Realizar el análisis estadístico teniendo en consideración lo señalado con los datos que aparecen en la tabla 5.11

Tabla 5.11 Rendimiento de cinco variedades de papa (Tn/ha)

Bloques	Tratamientos					Total Bloques
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
I	25	20	35	19	28	
II	30	18	**Y**	17	26	91+Y
III	20	24	32	20	27	
IV	24	19	34	21	30	
Tot Trat			101+Y			469+Y

Para estimar el valor de Y, empleamos la ecuación 5.5. En la que el número de tratamientos t es cinco, el número de bloques $\boldsymbol{b}$ es cuatro.

Entonces: $Y = \frac{5(101)+4(91)-469}{(4-1)(5-1)} = \frac{400}{12} = 33.33$

Este valor se reemplaza en la tabla 5.12 y se procede a elaborar el análisis de varianza, la misma que se observa en la tabla 5.13 del ANVA, proporcionado por el paquete statgraphics Plus.

Tabla 5.12 Rendimiento de cinco variedades de papa (Tn/ha), con el Valor perdido estimado

Bloques	Tratamientos					Total Bloques
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
I	25	20	35	19	28	127
II	30	18	**33.33**	17	26	124.33
III	20	24	32	20	27	123
IV	24	19	34	21	30	128
Tot Trat	99	81	134.33	77	111	502.33

CÁLCULOS

1º Término de corrección

$$\mathrm{TC} = \frac{502.33^2}{20} = 12616.77$$

2º Suma de cuadrado de totales

$$\mathrm{SCTotales} = 25^2 + 30^2 + \cdots + 27^2 + 30^2 - 12616.77 = 641.12$$

3º Suma de Cuadrado de Tratamientos

$$S\mathrm{Ctratamientos} = \frac{99^2+81^2+134.33^2+77^2+111^2}{4} - 12616.77$$

$$= \frac{52656.55}{4} - 12616.77 = 547.36$$

4º Suma de cuadrado de Bloques

$$\mathrm{SCBloques} = \frac{127^2+124.33^2+123^2+128^2}{5} - 12616.77$$

$$= \frac{63099.95}{5} - 12616.77 = 3.22$$

5º Suma de Cuadrado del Error

$$SCError\ = SCTot - SCtra - SCBlq$$

$$= 641.12 - 547.36 - 3.22 = 90.54$$

Tabla 5.13 ANVA para el rendimiento de papa

Fuente de Variabilidad	GL	SC	CM	F
Bloques	3	3.22	1.07	
Tratamientos	4	547.36	136.84	16.63*
Error	11	90.54	8.23	
Total	18	641.12		

Como se puede notar en el cuadro del ANVA, tabla 5.13, los grados de libertad del error se ha disminuido en una unidad, y se puede observar que existen diferencias estadísticas significativas en el rendimiento de variedades de papa usadas en el experimento, por lo que se coloca un asterisco (*)

A continuación se presentan los resultados proporcionado por el paquete statgraphics, fig. 5.5, lo que ratifica los resultados encontrados por el método manual.

Fig. 5.5 Resultados de experimento de papa mediante statgraphics

Análisis de la Varianza para rendimiento

Fuente	Suma de Cuadrados	GL	Cuadrado Medio	Cociente-F	P-Valor
EFECTOS PRINCIPALES					
A:bloque	3,21833	3	1,07278	0,14	0,9327
B:tratamiento	547,366	4	136,841	16,62	0,0001
RESIDUOS	90,5333	11	8.2303		
TOTAL (CORREGIDO)	641,117	18			

Los cocientes F están basados en el error cuadrático medio residual.

El StatAdvisor

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de rendimiento en las contribuciones debidas a varios factores. Puesto que se ha elegido la suma de cuadrados Tipo III (valor por defecto), se ha medido la contribución de cada factor eliminando los efectos del resto de los factores. Los P-valores comprueban la importancia estadística de cada uno de los factores. Dado que un p-valor es inferior a 0,05, este factor tiene efecto estadísticamente significativo en rendimiento para un 95,0%.

5.8.2 Experimentos con dos datos perdidos

Cuando se presenta en un experimento un caso de dos datos que se pierden, se procede a estimar los datos siguiendo el procedimiento de los mínimos cuadrados. Sin embargo, una forma más simple, es la de estimar valores para los datos perdidos mediante ciclos y cuando estos no presentan demasiadas variaciones el ciclo concluye y se realiza el análisis.

En el ejemplo de cinco variedades de papa, supongamos que se han perdido dos datos, tal como se observa en la tabla 5.14

Tabla 5.14 Rendimiento de cinco variedades de papa en (Tn/ha) con dos datos perdidos

Bloques	Tratamientos					Total Bloques
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
I	25	20	35	19	28	127
II	30	18	$\mathbf{Y_2}$	17	26	$91+Y_2$
III	20	24	32	20	27	123
IV	$\mathbf{Y_1}$	19	34	21	30	$104+Y_1$
Tot Trat	$75+Y_1$	81	$101+Y_2$	77	111	$469+Y_1+Y_2$

Al observar los datos de los tratamientos, en cada bloque se observa en la mayoría de los casos datos muy cercanos. Debido a este carácter, se estima como primer valor de prueba de Y_1 el promedio de 25, 30 y 20 o sea 25. Con este dato, se procede a calcular el primer valor de prueba de Y_2 , como si se tratara de un sólo dato perdido, considerando los siguientes valores, según la ecuación 5.5,

$T = 101 \qquad B = 91 \qquad G = 445 + 25 = 470$

$$Y_2 = \frac{tT + bB - G}{(b-1)(t-1)} = \frac{5(101) + 4(91) - 470}{12} = 33.25$$

Seguidamente, se estima el segundo valor de prueba de Y_1, considerando los siguientes datos:

$T = 75 \qquad B = 104 \qquad G = 445 + 33.25 = 478.25$

Y empleando la misma ecuación

$$Y_1 = \frac{tT + bB - G}{(b-1)(t-1)} = \frac{5(75) + 4(104) - 478.25}{12} = 26.06$$

Este ciclo de estimaciones se realiza hasta observar que las nuevas observaciones estimadas, no difieran de manera significativa de las estimaciones anteriores. Se procede a calcular el segundo valor de Y_2, con los datos siguientes:

$T = 101$ $\quad$ $B = 91$ $\quad$ $G = 445 + 26.06 = 471.06$

$$Y_2 = \frac{tT + bB - G}{(b-1)(t-1)} = \frac{5(101) + 4(91) - 471.06}{12} = 33.16$$

Los valores calculados son muy cercanos con los valores encontrados previamente, de modo que se da por concluido el ciclo de cálculos de los valores perdidos. En consecuencia, los valores estimados son:

$Y_1 = 26.06$ $\quad$ $Y_2 = 33.16$

Seguidamente, se construye el análisis de varianza, incluyendo estas estimaciones. Se tendrá 17 grados de libertad para el total y 10 grados de libertad para el error.

Cálculos:

$TC = 12\,711.89$

$SCT = 13\,349.71 - 12\,711.89 = 637.82$

Tabla 5.15 Rendimiento de cinco variedades de papa (tn/ha) con dos valores estimados

Bloques	Tratamientos					Total Bloques
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
I	25	20	35	19	28	127
II	30	18	33.16	17	26	124.16
III	20	24	32	20	27	123
IV	26.06	19	34	21	30	130.06
Tot Trat	101.06	81	134.16	77	111	504.22

$SCt = 13\,255.75 - 12\,711.89 = 543.86$

$SCB = 12\,717.86 - 12\,711.89 = 5.97$

$SCE = 637.82 - 543.86 - 5.97 = 87.99$

Tabla 5.16 ANVA para rendimiento de cinco variedades de papa con dos valores estimados

Fuente de variabilidad	G.L	SC	CM	F_c
Bloques	3	5.97	1.99	
Tratamientos	4	543.86	135.96	15.45*
Error	10	87.99	8.80	
Total	17			

Observe que los grados de libertad del error quedan disminuidos en dos unidades. Si no se hubiera presentado el hecho descrito en este acápite, 12 serían los grados de libertad del error y 19 del total.

5.9 EFICIENCIA DEL DISEÑO DE BLOQUES COMPLETOS CON RESPECTO AL DISEÑO COMPLETAMENTE AL AZAR DE UNA VÍA.

En toda investigación, es relevante comprobar la eficiencia de las técnicas en los experimentos con la finalidad de evaluar el desempeño de cada técnica. Puesto que las técnicas de los diseños experimentales se deben adaptar a los experimentos y no lo contrario, es por ello, que el investigador debe conocer la potencialidad de cada uno de ellos. Así, al hacer uso de una técnica superior, la sensibilidad del análisis es diferente. La eficiencia de un método de diseño se debe comparar con otro más sencillo. Por ello resulta conveniente realizar un análisis para ver si el diseño de bloques completos al azar ha mejorado la eficiencia en la estimación de las comparaciones entre medias de los tratamientos, con respecto al empleo de un diseño completamente al azar de una sola vía. El valor que resulta de esta estimación se puede interpretar como el incremento del número de repeticiones necesarias que se debe llevar a cabo en un diseño completamente al azar para que pueda usarse en lugar de un diseño de bloques completos y tratar de mantener la misma sensibilidad en ambos diseños. Para este propósito, a fin de medir la eficiencia relativa del DBCA, respecto al Diseño Completamente al Azar, empleamos, en primer lugar la ec. 5.6, proporcionado por STEEL y TORRIE (1992), que estima el cuadrado medio del error de un diseño completamente al azar

$$\widehat{CME}_{DCA} = \frac{(b-1)CMB + (b)(t-1)CME}{(bt-1)} \qquad ec. 5.6$$

Donde: $b = es\ el\ número\ de\ bloques$
$t = número\ de\ tratamientos$
$CMB = cuadrado\ medio\ de\ bloques$
$CME = cudrado\ medio\ del\ error$
$\widehat{CME}(DCA)$: $estimado\ del\ CME\ del\ DCA$

Estimado el cuadrado medio del error para un diseño completamente al azar, se procede a aplicar la ec. 5.7 de la eficiencia relativa del diseño de bloques, mediante:

$$E.R. = \frac{(GLE+1)(GLB+GLE+3)(\widehat{CME}_{DCA})}{(GLB+GLE-1)(GLE+3)(CME_{DBA})} \text{x}100 \qquad \text{ec. 5.7}$$

Si la eficiencia del diseño es 100%, significa que la sensibilidad es indiferente al uso de un diseño de bloques completos al azar, frente al diseño al azar de una via. Si la E.R.. es superior a 100% significa que el uso del diseño de bloques completos al azar, fue apropiado, de lo contrario, significará que el diseño completamente al azar es más eficiente.
Existe otro criterio para analizar la calidad de los diseños, y está referido al coeficiente de variabilidad (CV). En experimentos conducidos en algodón y caña de azúcar, Martínez (1970), presenta una tabla de frecuencias en la que estratifica la calidad de los experimentos mediante el uso de los coeficientes de variabilidad.

Rango del C.V.	Indicador de Calidad
$5 < cv \leq 10$	Muy buena
$10 < cv \leq 15$	Buena
$15 < cv \leq 20$	Regular
$20 < cv \leq 25$	Mala
$cv > 25$	Muy mala

Ejemplo 5.3 Se ha diseñado un experimento para probar las características sensoriales de cinco marcas de Café Peruano. Para ello se ha seleccionado 10 jueces, los mismos que fueron asignados aleatoriamente a cada uno de las marcas. La escala de puntos es (1= extremadamente malo, 9= extremadamente bueno). Las cuatro características que los jueces tiene que evaluar son; sabor, aroma, riqueza y acidez. La siguiente tabla, muestra los resultados proporcionado por cada uno de los jueces (bloques) para cada marca, con las cuatro características combinadas acumuladas.

Las características combinadas están referidas a la acumulación de los datos reportados por los jueces, respecto de una muestra, dado que son valores pequeños, resulta más conveniente combinar los resultados por cada característica a fin de obtener resultados significativos al momento de tomar la determinación en la comparación sensorial de las marcas de café.

Tabla 5.17 Evaluaciones sensoriales de cinco marcas
de Café Peruano

Jueces (Bloques)	Marcas(tratamientos)					Total Bloques
	A	B	C	D	E	
1	33	35	34	34	31	167
2	36	36	35	35	33	175
3	26	31	29	29	25	140
4	33	36	34	34	32	169
5	31	34	31	31	30	157
6	35	36	33	33	33	170
7	36	35	31	31	32	165
8	34	36	33	33	30	166
9	31	32	29	32	28	152
10	32	30	31	29	27	149
Total Marcas	327	341	320	321	301	1610
Medias	32.7	34.1	32.0	32.1	30.1	**32.2**

Realizar el análisis estadístico empleando un diseño de bloques completos al azar para determinar si existe diferencias en las estimaciones conjuntas de las cinco marcas de café. Construir el ANVA
Calcular la eficiencia relativa del diseño de bloques respecto a un diseño completamente al azar.

Solución

A fin de calcular los valores correspondientes para el análisis estadístico, empleamos el paquete statgraphics

Fig. 5.6 Resultados proporcionados por Statgraphics

Tabla **de** Análisis de la Varianza para estimaciones

Fuente	Suma de Cuadrados	GL	Cuadrado Medio	Cociente *F*	P-valor
EFECTOS PRINCIPALES					
A: jueces	220,0	9	24,4444	17,32	0,0000
B: tratamientos	83,2	4	20,8	14,74	0,0000
RESIDUOS	50,8	36	1,41111		
TOTAL (CORREG)	354,0	49			

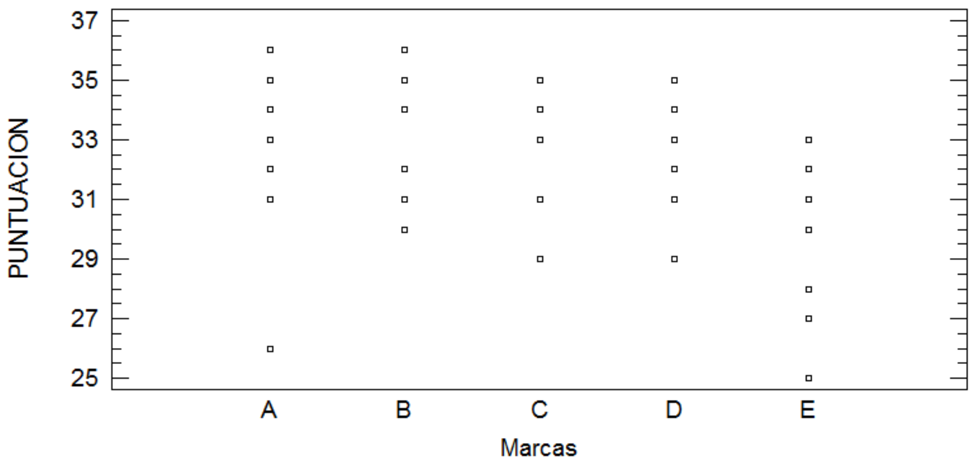
Los cocientes F están basados en el error cuadrático medio residual.

El StatAdvisor

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de estimaciones en las contribuciones debidas a varios factores. Puesto que se ha elegido la suma de cuadrados Tipo III (valor por defecto), se ha medido la contribución de cada factor eliminando los efectos del resto de los factores. Los P-valores comprueban la importancia estadística de cada
uno de los factores. Dado que 2 p-valores son inferiores a 0,05, estos factores tienen efecto estadísticamente significativo en estimaciones para un 95,0%.

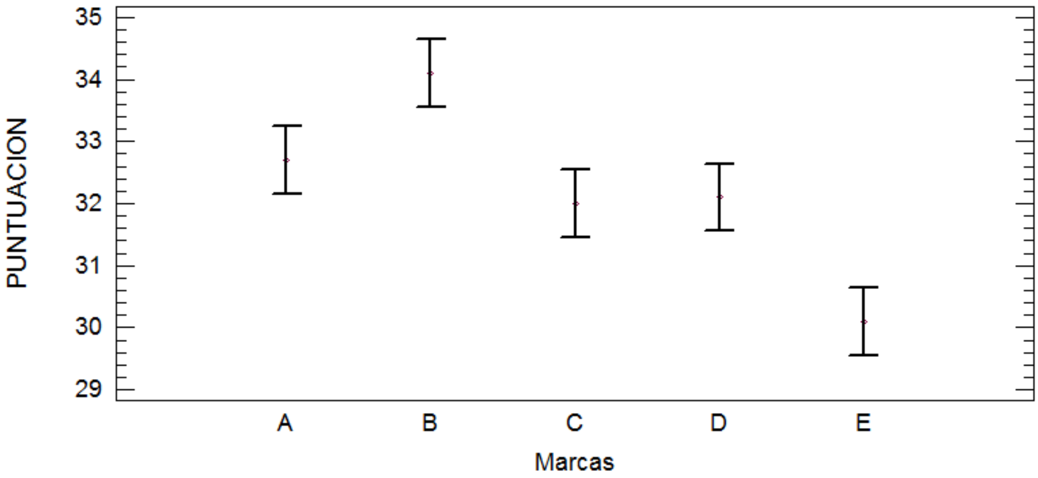
En la fig. 5.6 de los resultados proporcionado por el paquete Statgraphics Plus se llega a la conclusión que las medias de los tratamientos o marcas de Café peruano son estadísticamente significativas. Puesto que el p-valor para tratamientos, que es el factor relevante, es casi nulo 0,0000, lo cual es inferior al nivel de significación del 5%.

Fig. 5.7 Gráfica de calificaciones por marcas de café



En la fig. 5.7, se puede notar que existen diferencias en las apreciaciones de los jueces al momento de exponer sus resultados, sin embargo, se debe hacer notar, que los jueces en este experimento, actúan como bloques, por lo que no es relevante la decisión que se tome, puesto que son las marcas de café el factor a investigar.

Fig.5.8 Gráfica de medias con intervalos de confianza



En la fig. 5.8 se observa que existen diferencias en las medias de muestras de las cinco variedades de café. En promedio, el análisis sensorial de las variedades de café nos proporciona una media de 32.7 para la primera marca, 34.1 para la segunda marca, para la tercera marca de café el promedio es, 32.0, 32.1 para la cuarta marca de café y 31.1 para marca 5**.** La pregunta que en todo caso debe corresponder con el interés del investigador es, si estos resultados de las muestras de las cinco marcas de café son lo suficientemente diferentes para que las empresas que las producen decidan que los promedios de población de todos los café de las marcas estudiadas son todos iguales-.

b) Eficiencia Relativa del Diseño de Bloques

Empleando la ecuación 5.6, se estima el CME, del diseño completamente al azar. Con los datos proporcionados por el ANVA de la fig. 5.6, se tiene:

$$\widehat{CME}_{DCA} = \frac{(10-1)24{,}4444 + 10(5-1)1{,}41111}{(10*5-1)} = \frac{276.444}{49}$$
$$= 5.642$$

Con este resultado obtenido, estamos en condiciones de calcular la eficiencia relativa del diseño de bloques completos al azar, respecto de un diseño completamente al zar de una vía, mediante la ecuación 5.7

$$E.R. = \frac{(36+1)(9+36+3)(5.642)}{(45-1)(36+3)(1.4111)} x\ 100 = 413.8\%$$

De acuerdo al resultado que se observa, puede afirmarse con bastante precisión, que el diseño de bloques completos al azar es más eficiente que el diseño de una via, en más del 413.8%, lo que significa que el diseño es apropiado para el experimento. Así mismo, se necesitarían algo más de cuatro veces repeticiones en cada muestra de tratamiento (marcas de café) en un diseño completamente al azar, para obtener la misma precisión en la comparación de las marcas de café, de un diseño de bloques completos al azar.

En cuanto a la calidad del experimento, se calcula el coeficiente de variabilidad mediante la ec. 5.8

$$\mathbf{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} x\ 100 = \frac{\sqrt{CME}}{\bar{x}} \text{ x } 100 \qquad \text{ec. 5.8}$$

Donde; σ es la desviación estándar o raíz cuadrada del CME y $\bar{x}$ es la media global de los tratamientos.
Reemplazando los datos en dicha ecuación, el resultado que se obtiene es;

$$CV = \frac{\sqrt{1.4111}}{32.2} x100 = 3.69\%$$

De acuerdo a la tabla presentada en la sección 5.9, el valor del coeficiente de variación se ubica en la categoría de muy bueno, significando que el experimento tiene una calidad muy buena en cuanto a la homogeneidad de sus datos muestrales recogidos. Este coeficiente es un indicador de la calidad de los resultados de un experimento, cuanto menor sea este valor, indica que el experimento reúne condiciones que satisfacen los objetivos que se planean al iniciar una experiencia.

TÉRMINOS CLAVE

Diseño de bloques al azar
Unidad experimental
Grados de libertad
Eficiencia relativa del diseño
Datos perdidos

Ejercicios Propuestos

1. Explicar la diferencia entre el diseño de bloques completos al azar y el diseño completamente al azar. En lo que se refiere al análisis de varianza.

2. Una empresa agroindustrial desea ofertar al mercado cinco productos de Cacao orgánico de marcas diferentes (tratamientos). Antes de su lanzamiento, realiza una prueba de sabor, aroma y acidez, en escala del 1 al 9, (desde completamente malo=1, hasta completamente bueno=9). Para las pruebas sensoriales convoca a ocho expertos en cata (bloques), cuyos resultados conjunto de las características se muestran en la tabla siguiente.

Expertos	Marcas de Cacao				
	A	B	C	D	E
1	32	35	32	34	21
2	28	36	31	38	28
3	26	34	35	36	26
4	30	33	30	35	37
5	25	35	29	37	30
6	28	34	28	25	25
7	27	36	27	34	22
8	22	32	28	33	25

Construir gráficos de medias o diagramas y describir la relación que observa entre los tratamientos y bloques.
Empleando un nivel del 5%, realizar el análisis de los datos a fin de observar si hay evidencias de diferencias entre las medias de las marcas de cacao.
Calcular la eficiencia relativa del diseño de bloques aleatorizados frente a un diseño completamente al azar.

3. Un experimento de campo se conduce bajo un diseño completamente al azar, con cinco variedades de Cebolla y cinco bloques. Los datos se presentan en la siguiente tabla.

Bloques	Variedad de Cebolla(Tn/ha)				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
I	18	15	17	19	22
II	21	16	19	18	25
III	22	12	28	17	24
IV	20	13	25	18	26
V	19	12	26	19	23

Realizar un análisis de varianza
A un nivel del 1% existen diferencias significativas entre las medias de variedades de cebolla.
Empleando un paquete informático, graficar las medias de los tratamientos por bloques.

4. Suponga que en la tabla del ejercicio 3 se pierde un dato por presencia de extraños en el campo de cultivo.
   a) Estimar el valor del valor perdido.

b) Una vez calculado el valor perdido, realizar el análisis de los datos de acuerdo a las recomendaciones para este caso.

Bloques	Variedad de Cebolla(Tn/ha)				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
I	18	15	17	19	22
II	21	16	19	18	25
III	22	**Y**	28	17	24
IV	20	13	25	18	26
V	19	12	26	19	23

5. Suponer que en la tabla del ejercicio 3 se pierden dos datos por presencia de extraños en el campo de cultivo.

a) Estimar el valor de los valores perdidos.

b) Una vez calculado el valor de los datos perdidos, realizar el análisis del experimento, con los datos perdidos, de acuerdo a las recomendaciones que debe tenerse en cuenta para estos casos.

Bloques	Variedad de Cebolla(Tn/ha)				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
I	18	15	17	19	22
II	21	16	$\mathbf{Y_1}$	18	25
III	22	12	28	$\mathbf{Y_2}$	24
IV	20	13	25	18	26
V	19	12	26	19	23

6. Calcular, para los datos de la pregunta 2, la eficiencia relativa del experimento conducido en un diseño de bloques completos al azar.

7. Calcule ¿en cuánto ha mejorado la eficiencia relativa de los resultados del experimento descrito en la pregunta 3, con respecto a un diseño completamente al azar?

8. Se ha conducido un experimento, en la cual se desea comparar la capacidad de producción de cinco máquinas, para la elaboración de piezas en 8 horas de trabajo, en un diseño de Bloques Completos al Azar con cinco bloques. Los bloques son trabajadores de 5, 10,15, 20 y 25 años de experiencia. Los datos se presentan en la tabla siguiente:

Trabajador	Máquinas				
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
T_1	400	416	425	468	450
T_2	410	452	432	472	460
T_3	430	405	413	482	470
T_4	470	409	450	462	480
T_5	412	411	431	418	490

a) Realizar el análisis estadístico con un $\alpha = 0.05$.

b) ¿La capacidad de producción de las máquinas son todas similares?

c) Calcule la eficiencia relativa del diseño respecto de un diseño completamente al azar.

9. En un experimento se desea comparar cinco métodos de enseñanza de la estadística a alumnos de cuatro diferentes carreras profesionales (bloques). Los resultados(puntaje) después de aplicar una prueba estándar son los siguientes

Carreras	*Métodos*				
	M_A	M_B	M_C	M_D	M_E
Economía	56	60	58	61	62
Administración	64	65	64	66	65
Contabilidad	69	70	72	74	70
Ingeniería	80	89	85	90	88
Negocios	74	75	73	72	74

a) Realizar el análisis estadístico.
b) ¿Puede concluir que los métodos empleados tienen efectos similares en los estudiantes?
c) Calcular la eficiencia relativa del diseño de bloques al azar con respecto al diseño completamente aleatorizado.

10. Se conduce un experimento en cacao, en la región San Martín, en Perú, se desea probar cinco Cultivares comerciales. El experimento se conduce en un diseño de bloques completos al azar, con cinco bloques. Los datos de rendimiento, se pueden observar en la siguiente tabla, en Kilogramos por hectárea.

Bloques	*Cultivar(Kg/ha)*				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
I	1250	1000	950	1350	950
II	1100	950	789	1400	900
III	1300	800	800	1500	800
IV	1350	980	900	1360	923
V	1300	1000	850	1290	870

a) Realizar el análisis estadístico.
b) Pruébese la hipótesis de que los cultivares tienen un rendimiento promedio similar.
c) Realizar el cálculo de la eficiencia relativa del diseño de bloques respecto al diseño completamente aleatorio.

11. El café es considerado en el Perú como un producto bandera, en esa razón, se prueban cinco fertilizantes a fin de obtener un mayor rendimiento. El experimento se conduce en un diseño de bloques completos al azar, empleando para tal efecto, plantaciones de 7 años(bloque I), 9años (bloque II), 11 años(bloque III) y 13 años(bloque IV). Los datos (en Kg/ha) aparecen a continuación.
a) Realizar el análisis estadístico correspondiente, enunciando las hipótesis adecuadas.
b) A nivel de $\alpha = 0.05$, ¿el rendimiento de café muestra diferencias a distintos niveles de fertilización.

c) Establecer los intervalos de confianza para las medias por cada nivel de fertilización.
d) Empleando un paquete informático realizar la gráfica de medias.
d) Empleando un paquete informático realizar el grafico de Caja y bigote para las medias de rendimiento

Bloques	*Fertilizante(Kg/ha)*				
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
7 años	4500	6500	6500	3600	7000
9 años	4800	5400	4800	3800	6500
11 años	6000	3000	6200	3900	4800
13 años	5000	4000	5100	4200	6900

12. Una empresa dedicada a la comercialización de café orgánico desea incursionar en el rubro de expendio de café preparado a diferente público, con el objeto de iniciar sus actividades presenta en una sala del café cinco variedades de su producto. Antes de su lanzamiento, realiza una prueba de sabor, aroma, acidez y color, en una escala del 1 al 9, (desde completamente malo=1, hasta completamente bueno=9). Para las pruebas del análisis sensorial convoca a siete expertos en cata (bloques), cuyos resultados conjunto de las características mencionadas se muestran en la tabla siguiente.

	Marcas de Cacao				
Expertos	A	B	C	D	E
1	30	28	30	25	36
2	28	29	34	26	34
3	34	27	35	23	35
4	35	29	30	27	38
5	28	30	32	20	34
6	29	31	31	24	32
7	32	29	29	23	36

a) Realizar el análisis estadístico correspondiente, enunciando las hipótesis adecuadas.
b) A nivel de $\alpha = 0.01$, ¿las variedades de café muestran diferencias en sus características sensoriales?
c) Establecer los intervalos de confianza para las medias por cada variedad del producto.
d) Empleando un paquete informático realizar la gráfica de medias para las variedades.
e) Empleando un paquete informático realizar el grafico de Caja y bigote para los promedios de variedad.

CAPÍTULO VI

PRUEBAS DE SIGNIFICACIÓN ESTADÍSTICA

Es importante que el lector tenga la idea muy clara, respecto a La prueba estadística que desea emplear cuando emprende una investigación. Las preguntas significativas que el investigador se plantea antes del inicio de trabajo, espera que sean respondidas y despejado las dudas, dado que allí radica la importancia para el investigador que le permitirá determinar los niveles de tratamiento a incluir en el experimento. Así mismo, el método más apropiado que se debe emplear cuando se realizan comparaciones entre tratamientos. En esta ocasión, antes de desarrollar los métodos de pruebas, por razones didácticas, consideremos algunas recomendaciones importantes para realizar las pruebas y que debe tenerse presente a fin de lograr el máximo provecho de los resultados.

1º Cuando el propósito del estudio es realizar comparaciones de varios tratamientos versus uno en particular, llamado testigo, es preferible realizar la prueba uno por cada tratamiento adyacente a fin de evitar sesgos en el momento de las comparaciones, por ejemplo si el estudio consiste en comparar cinco tratamientos nuevos(A) frente a un testigo (T), veamos la ilustración a continuación:

Tratamientos nuevos: A_1, A_2, A_3, A_4 , A_5
Tratamiento testigo: T

Comparaciones:
$T\ Vs\ A_1$
$T\ Vs\ A_2$
$T\ Vs\ A_3$
$T\ Vs\ A_4$
$T\ Vs\ A_5$

2º En investigaciones que involucran dosificaciones vitamínicas en animales, niveles de fertilización en plantas, niveles de fumigación de pesticidas en general, raciones alimenticias, dosificaciones hormonales, la pregunta fundamental está dirigida a señalar las respuestas a estos tratamientos y los indicadores que mejor expliquen las respuestas, mas no a preguntarnos si algún nivel de tratamiento es significativamente mejor que otro.

3º En experimentos factoriales, en la cual simultáneamente se estudian dos o más factores, permite observar la interacción de los factores intervinientes, es decir, si el efecto que causan simultáneamente en la variable dependiente es relevante. Sin embargo, sucede en ocasiones que no se observan interacciones, en este caso, el aporte de cada factor interviniente en la investigación cobra mayor importancia, puesto que cada nivel del factor se prueba por separado.

El empleo de las recomendaciones dados líneas arriba, está supeditado al uso en primera instancia de la prueba de *F*, cuando ésta es significativa, es pertinente pasar a la etapa de las comparaciones de tratamientos en forma individual, ¿qué nivel de tratamiento es significativamente diferente de otros?, es la pregunta obligada que el investigador debe plantearse antes de proceder a las pruebas que vamos a abordar a continuación:

6.1 DIFERENCIAS MÍNIMAS SIGNIFICATIVAS (DMS)

Esta prueba debe realizarse solamente si la prueba de *F* resulta significativa, para las comparaciones, se debe ordenar los tratamientos en orden de magnitud para que las comparaciones resulten de mayor provecho para la investigación. Se recomienda emplear la prueba DMS, entre tratamientos arreglados y adyacentes y sobre todo puede resultar de mayor provecho si comparamos entre un tratamiento testigo y un grupo de tratamientos nuevos que se desea probar en una circunstancia particular.

Esta prueba de significación está basada en la prueba *t* de student, en la cual se estudian las diferencias entre las medias de los tratamientos, mediante los errores estándar estimados de los niveles que reciben los tratamientos. El uso de esta prueba tiene amplio uso en las investigaciones por su sencillez y facilidad en su cálculo.

La prueba de la DSM, se deriva del valor de *T* calculado en la prueba de diferencias de medias.

$$\mathrm{t_c} = \frac{\bar{\mathrm{d}} - \mu_{\bar{\mathrm{d}}}}{\sigma_{\bar{d}}}$$

Donde t_c , es el valor calculado de t, $\bar{d}$; es la diferencias de dos medias, $\mu_{\bar{d}}$, es la media de las diferencias de medias supuestas, que se supone igual a cero, y $\sigma_{\bar{d}}$, error estándar estimado de las diferencias de medias.

En la fórmula anterior, $\bar{d} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$, $\mu_{\bar{d}} = 0$, si reemplazamos $\bar{d}$ por DMS y $\mu_{\bar{d}}$ por cero, la fórmula se transforma en:

$\mathrm{t_c} = \frac{\mathrm{DMS}}{\sigma_{\bar{d}}}$, de donde resolviendo para DMS, resulta:

$DMS = t_c(\sigma_{\bar{d}})$, puesto que en la práctica es difícil contar con σ, entonces lo estimaremos mediante *s*, por tanto, $\sigma_{\bar{d}}^2$ puede escribirse como: $S_{\bar{d}}^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$, donde $s_1^2\ y\ s_2^2$ son las varianza estimadas de los tratamientos 1 y 2 respectivamente y n_1 y n_2 son las unidades experimentales de los tratamientos 1 y 2

En el análisis de varianza los valores s_1^2 y s_2^2, representan varianzas supuestamente iguales, por lo tanto:

$DMS = t.\sqrt{\frac{2S^2}{n}}$, donde s^2, es el cuadrado medio del error, n es el número de repeticiones iguales para todos los tratamientos, y t es el valor de la tabla para los grados de libertad del error.

A fin de ilustrar el empleo de la DMS, desarrollamos un ejemplo para comparar las medias de los tratamientos en un diseño completamente al azar.

Ejemplo 6.1 Se ha llevado a cabo un experimento en un diseño completamente al azar para probar el rendimiento de seis variedades de papa. Los resultados se observan en la tabla siguiente:

Tabla 6.1 Resultados de un experimento en DCA(Tn/ha)

Repeticiones	TRATAMIENTOS					
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
1	40	36	29	39	20	28
2	45	30	27	37	21	30
3	39	32	30	38	23	31
4	34	38	34	40	24	36
5	35	34	24	42	19	26
Total	193	170	144	196	107	151
Medias	38.6	34.0	28.8	39.2	21.4	30.2

Se elaboró una tabla de análisis de varianza y a partir de esta procedemos a realizar la prueba de *DMS*.

Tabla 6.2 ANOVA para Rendimiento según Tratamiento
Análisis de la Varianza

Fuente	Sumas de Cuadrados	GL	Cuadrado Medio	Cociente-F	P-Valor
Entre grupos	1126,17	5	225,233	20,73	0.0000
Intra grupos	260,8	24	10,866		
Total	1386,97	29			

La tabla 6.2 ANOVA, descompone la varianza de Rendimiento en dos componentes: un componente entre grupos y un componente dentro de los grupos. El F-ratio, que en este caso es igual a 20,727, es el cociente de la estimación entre grupos y la estimación dentro de los grupos. Puesto que el p-valor del test *F* es inferior al nivel de significación 0,05, se concluye que hay diferencias estadísticas significativas entre los Rendimientos medios de un nivel de Tratamiento a otro para una confianza del 95,0%. Puesto que la prueba de *F*

resulta significativa, para determinar las medias que son significativamente diferentes unas de otras, procederemos a realizar la prueba DMS.
Los rendimientos medios de papa son:
$V_1 = 38.6$, $V_2 = 34.0$, $V_3 = 28.8$, $V_4 = 39.2$, $V_5 = 21.4$, $V_6 = 30.2$, Toneladas por hectárea

$$DMS_{0.05} = t_{0.05}.\sqrt{\frac{2CME}{n}} = 2.064\sqrt{\frac{2(10.8667)}{5}} = 4.303 \text{ Toneladas por hectárea}$$

Las diferencias entre las medias de cada tratamiento, teniendo en cuenta el valor absoluto de las diferencias de medias, apreciamos en la matriz siguiente:

	1 = 38.6	2 = 34.0	3 = 28.8	4 = 39.2	5 = 21.4	6 = 30.2
1 = 38.6						
2 = 34.0	14.6*	-	-	-	-	-
3 = 28.8	9.8*	5.2*	-	-	-	-
4 = 39.2	-0.6	-5.2*	-10.4*	-	-	-
5 = 21.4	17.2*	12.8*	7.4*	17.8*	-	-
6 = 30.2	8.4*	3.8	-1.4	9*	-8.8*	-

Al comparar las diferencias con el valor de DMS, se observa que entre 1 y 2 , 1 y 4, 2 y 6, 3 y 6 , no presentan diferencias significativas. El resto de comparaciones que se aprecian, que muestran asterisco (*), presentan diferencias estadísticas significativas

Los resultados pueden resumirse con un subrayado común después que las medias se hayan dispuesto mediante un arreglo ordenado, de menor a mayor, como se puede observar a continuación. Las medias que se encuentran unidas por la línea no muestras diferencias.

Medias ordenadas de menor a mayor

```
V         III       VI        II        I         IV
21.4      28.8      30.2      34.0      38.6      39.2
                              --------------
                                        --------------
                    --------------
          --------------
```

La prueba DMS, varía un tanto, cuando el diseño del experimento no es balanceado, es decir, el número de elementos de cada tratamiento no es igual. En ese caso se usa el método alternativo DMS, que puede generalizarse de acuerdo a la ecuación 6.1, siguiente:

$$DMS = t_{\alpha}.\sqrt{\left(\frac{1}{n_{t_k}} + \frac{1}{n_{t_m}}\right) CME} \qquad \text{ec. 6.1}$$

En donde n_{t_k} es el número de observaciones del tratamiento t_k, y n_{t_m} es el número de observaciones en el tratamiento t_m . En consecuencia el valor de DMS, será diferente para cada par de medias que se comparan, puesto que el número de observaciones no es el mismo en cada muestra. A continuación, desarrollamos un ejemplo para aplicar lo señalado con DMS, con desigual número de observaciones por tratamiento.

Ejemplo 6.2 Supongamos que en la tabla 6.1 del ejemplo 6.1, se pierden algunas observaciones y como resultado de ello la tabla queda como se muestra seguidamente

Tabla 6.3 Resultados de un experimento en DCA(Tn/ha) con número diferente de repeticiones

Repeticiones	TRATAMIENTOS					
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
1	40	36	29	39	20	28
2	45	30	27	37	21	30
3	39	32	30	38	23	-
4	34	-	34	40	24	-
5	35	-	24	-	19	-
Total	193	98	144	154	107	58
Medias	38.6	32.7	28.8	38.5	21.4	29.0

El procedimiento para calcular el análisis de varianza se presentó en el capítulo IV para diseños completamente al azar con tamaño desigual de muestra.
La tabla 6.4 de ANOVA descompone la varianza para Rendimiento en dos componentes: un componente entre grupos (tratamiento) y un componente dentro de los grupos (error). El valor de *F,* que en este caso es igual a 20,8129, es el cociente de la estimación entre grupos y la estimación dentro de los grupos. Puesto que el valor de *p* de la prueba *F* es inferior a 0,05, indica que hay diferencias estadísticas significativas entre los rendimientos medios de un nivel de Tratamiento a otro, para un nivel de confianza del 95,0%. Para determinar las medias que son significativamente diferentes unas de otras, procedemos a realizar la prueba de *DMS*

Tabla 6.4 ANOVA para Rendimiento según Tratamiento

Análisis de la Varianza

Fuentes de variabilidad	**Sumas de cuadrado**	**GL**	**Cuadrado medio**	**Cociente F**	**P-valor**
Entre grupos	1010.97	5	202.193	20.81	0.0000
Intra grupos	174.867	18	9.71481		
Total(Corr)	1185.83	23			

Procedemos a realizar las comparaciones entre medias de los tratamientos, comparemos la variedad 1 con la 2. El valor de t se busca con 0.05 y 18 grados de libertad, $t_{(0.05,18)}$ el valor de DMS es:

$$DMS_{0.05} = t_{0.05}.\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)CME} = 2.101.\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)(9.71481)} = 4.782$$

$1\,Vs\,2 = 38.6 - 32.7 = 5.9 > 4.782^{*}$ Significativo

Si comparamos 1 con 3, usamos:

$$DMS_{0.05} = t_{0.05}.\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_3}\right)CME} = 2.101.\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)(9.71481)} = 4.1416$$

$1\,Vs\,3 = 38.6 - 28.8 = 9.8 > 4.1416^{*}$ Significativo

Comparamos 1 con 4

$$DMS_{0.05} = t_{0.05}.\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_4}\right)CME} = 2.101.\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)(9.71481)} = 4.3929$$

$1\,Vs\,4 = 38.6 - 38.5 = 0.1 < 4.3929$ No significativo

Comparamos 1 con 5

$$DMS_{0.05} = t_{0.05}.\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_5}\right)CME} = 2.101.\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)(9.71481)} = 4.1416$$

$1\,Vs\,5 = 38.6 - 21.4 = 17.2 > 4.1416^{*}$ Significativo

Comparación de 1 con 6

$$DMS_{0.05} = t_{0.05}.\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_6}\right)CME} = 2.101.\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)(9.71481)} = 5.4789$$

$1\ Vs\ 6\ =\ 38.6 - 29.0 =\ 9.6\ >\ 5.4789^{*}$ Significativo

6.2 MÉTODO DE TUKEY

Este método fue desarrollado por J. W. Tukey, matemático norteamericano de la universidad de Princeton, en 1953. La fórmula de la prueba de Tukey se presenta en la ecuación 6.2

$$Alcance\ crítico = T = q_{\alpha,c,n-c}\sqrt{\frac{CME}{r}} \qquad \text{ec. 6.2}$$

Donde q representa una distribución de rangos estudiantizados con c y n-c grados de libertad, r el número de repeticiones en cada tratamiento, siendo α el nivel de significación seleccionado. Asimismo, c representa el número de tratamientos y n el total de unidades experimentales.

Esta prueba, consiste en probar los $c(c-1)/2$ pares de medias de tratamientos contra el alcance crítico (T). La decisión que debe tomarse, resulta de la comparación de las diferencias absolutas de medias $|\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{i.}|$ contra el alcance crítico, si la diferencia resulta mayor, se concluye que existe diferencia estadística significativa entre las medias en disputa.

Para el ejemplo del rendimiento de variedades de papa cuyos datos se muestra en la tabla 6.1 que se ha conducido en un diseño completamente al azar, el valor de c es igual a 6 tratamientos y n es 30 unidades experimentales. Si α es 0.05, entonces se deberá buscar el valor de $q_{(0.05),(6,24)},$ en la tabla E de valores críticos de la distribución de rangos estudiantizados para $\alpha = 0.05$. Allí se encuentra el valor de 4.37. Entonces, usando la ec. 6.2, se tiene

$$T = (4.37)\sqrt{\frac{10.8687}{5}} = 6.4430$$

El criterio de Tukey, entonces, se compara con la diferencia absoluta entre cada par de medias de tratamientos. Si cualquier diferencia de las medias absolutas comparadas resulta mayor que el valor de Tukey 6.4430, se concluye que, con un nivel de 5%, las medias poblaciones de donde provienen las muestras no son iguales y por lo tanto se rechaza la hipótesis nula de que las poblaciones tienen medias iguales.

Vamos a emplear las mismas comparaciones que se usaron en el ejemplo para la DMS.

En este caso vamos a elaborar una matriz a fin de realizar todas las comparaciones posibles entre los niveles de tratamiento.

medias	1	2	3	4	5	6
	38.6	34.0	28.8	39.2	21.4	30.2
1(38.6)	-	-	-	-	-	-
2(34.0)	4.6	-	-	-	-	-
3(28.8)	9.8*	5.2	-	-	-	-
4(39.2)	0.6	5.2	10.4*	-	-	-
5(21.4)	17.2*	12.6*	7.4 *	17.8*	-	-
6(30.2)	8.4 *	3.8	1.4	9.0*	8.8*	-

Al realizar las comparaciones entre las diferencias absolutas de las medias con $T = 6.4430$, se puede llegar a la conclusión que son pocas las comparaciones en que las medias provienen de poblaciones iguales, Nueve comparaciones de medias exceden el valor de Tukey. Estos resultados también pueden resumirse en una ilustración similar a la de la *DMS*, con subrayados, como se observa a continuación, previamente ordenados de mayor a menor. Las medias que están conectadas mediante un subrayado no muestran diferencias significativas, es decir, no difieren en forma significativa.

V	III	VI	II	I	IV
21.4	28.8	30.2	34.0	38.6	39.2
			----------------	----------------	----------------
	----------------	----------------	----------------		

Cuando el experimento es conducido en un diseño de bloques completos al azar, la ecuación 6.2, puede escribirse como:

$$T = q_{(\alpha,c),(r-1)(c-1)}\sqrt{\frac{CME}{r}} \qquad ec. 6.3$$

Dónde: $r = número\ de\ bloques$

$c = número\ de\ tratamientos$

$(r-1)$ es el número de grados de libertad de los bloques y $(c-1)$ grados de libertad de tratamientos.

6.3 PRUEBA DE RANGOS MÚLTIPLES DE DUNCAN

Es una prueba ampliamente empleada por los investigadores para realizar comparaciones múltiples. Es una técnica que corrige los errores que pueden presentarse en la prueba de DMS. Es muy parecida a la prueba DMS, para probar promedios de tratamientos adyacentes previamente ordenados y requiere valores progresivamente crecientes para la significación entre los promedios, en la medida en que éstos se encuentren más ampliamente separados en el arreglo[11].

Esta prueba se utiliza más apropiadamente cuando diversos tratamientos independientes se incluyen en un experimento, por ejemplo, cuando se requiere probar las capacidades de rendimiento de diversas especies agrícolas, se procede a realizar las comparaciones entre las medias de los rendimientos.

El procedimiento de la prueba se inicia ordenando los promedios de las medias de tratamientos bajo el criterio de menor a mayor, luego se procede a calcular el error estándar de las medias. Producido esto, se procede a calcular los Rangos de Significancia Mínima, para todas las posiciones relativas posibles entre las medias de los tratamientos, cuando estas se encuentran dispuestas en orden de magnitud. La fórmula para el cálculo de los rangos significativos mínimos es de acuerdo a la ecuación 6.4:

$$RSMn = R(\sigma_{\bar{x}}) \qquad \text{ec. 6.4}$$

En la cual $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{CME}{r}}$, es el valor del error estándar de las medias(r es el número de elementos de los tratamiento) y R es un valor que se extrae de la tabla de los factores estudiantizados significativos de Duncan, que se presenta en el anexo *F*. Estos valores se eligen de acuerdo al nivel de significación deseado (1% o 5%), con los grados de libertad del error y con la disposición de los promedios en el arreglo ordenado.

Ejemplo 6.3 Se llevó a cabo un experimento para probar el rendimiento de cuatro variedades de ají páprika con fines de exportación, bajo un diseño de bloques completos al azar. Los datos recogidos se presentan en la tabla 6.5.

Mediante el paquete estadístico statgraphics, se realiza el análisis de varianza y se prueban las hipótesis nula y alternativa:

[11] Procedimiento presentado por Little,Thomas(1981) en su libro “Métodos Estadísticos para la Investigación en la Agricultura”

Tabla 6.5 Rendimiento de cuatro variedades de Páprika(Tn/ha)

Bloques	*Variedades*				Total de Bloques
	A	*B*	*C*	*D*	
1	5.3	6.8	5.2	5.9	23.2
2	5.2	7.2	4.1	3.7	20.2
3	5.0	9.0	4.0	6.8	24.8
4	6.3	6.4	4.8	6.7	24.2
5	4.3	5.9	3.7	6.0	19.9
Total Trat	*26.1*	*35.3*	*21.8*	*29.1*	*112.3*
Med Trat	*5.22*	*7.06*	*4.36*	*5.82*	

H₀: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ (los rendimientos son iguales)
H₁: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4$ (los rendimientos son diferentes)

Tabla 6.6 Análisis de varianza para rendimiento

Fuente	Suma de cuadrado	GL	Cuadrado medio	Cociente F	P-valor
EFECTOS PRINCIPALES					
A: Variedades	19.3055	3	6.4352	7.48	0.0044
B: Bloques	5.178	4	1.2945	1.50	0.2620
RESIDUOS	10.322	12	0.8602		
TOTAL(CORREGIDO	34.8055	19			

Los cocientes *F* están basados en el error cuadrático medio residual.

El StatAdvisor

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de Rendimiento en las contribuciones debidas a varios factores. Los P-valores comprueban la importancia estadística de cada uno de los factores. Dado que un *p*-valor es inferior a 0,05, este factor tiene efecto estadísticamente significativo en Rendimiento para un 95,0%.

Debido a los resultados de la técnica del ANVA, se concluye que existe diferencias estadísticas significativas entre el rendimiento de las variedades de páprika. En consecuencia, procedemos a realizar las comparaciones múltiples de Duncan.
1º Se calcula las $\sigma_{\bar{x}}$ mediante

$$\sigma_{\bar{x}} = E.E = \sqrt{\frac{CME}{r}} = \sqrt{\frac{0.8602}{5}} = 0.4147$$

2º Se calculan los RSMn para todas las posiciones relativas de las medias ordenadas. Dado que son cuatro variedades de páprika o tratamientos, estas medias se encuentran separadas por 2, 3 ó 4. Los valores R se buscan en la tabla F del anexo de los valores estudiantizados de Duncan, para p y Grado de libertad del error (12), tal como se procede a continuación:

Posición relativa de p en el ordenamiento	**2**	**3**	**4**
Valores estudiantizados *R*, nivel 5%	3.081	3.225	3.312
RSMn=$R(\sigma_{\bar{x}}) = R(0.4147)$	1.278	1.337	1.373

3º Se disponen los promedios por orden de magnitud y se comparan las diferencias de medias con los valores de RSMn

$Tratamiento$:	C	A	D	B
$Media$:	4.36	5.22	5.82	7.06

Comparaciones

$B\ Vs\ C = 7.06 - 4.36 = 2.7 > 1.373 *$

$B\ Vs\ A = 7.06 - 5.22 = 1.84 > 1.337 *$

$B\ Vs\ D = 7.06 - 5.82 = 1.24 < 1.278$

$D\ Vs\ C = 5.82 - 4.36 = 1.46 > 1.337 *$

$D\ Vs\ A = 5.82 - 5.22 = 0.6 < 1.278$

$A\ Vs\ C = 5.22 - 4.36 = 0.86 < 1.278$

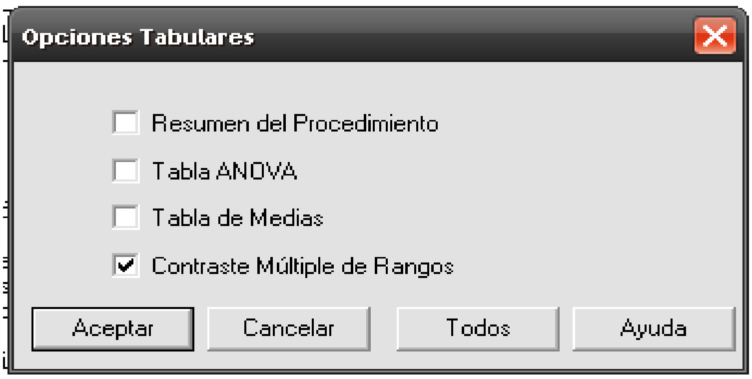
Comparación de las medias ordenadas de menor a mayor, la primera comparación es entre la mayor media y la menor. Si la diferencia es mayor o igual al $RSMn$, se concluirá que las medias son significativamente diferente (7.06 − 4.36 = 2.7). En el ejemplo que tratamos, se puede afirmar con certeza que 7.06 es significativamente mayor que 4.36. Luego se comparan la media mayor con la penúltima de las menores (7.06 − 5.22 = 1.84) esta diferencia resulta significativa puesto que es mayor que 1.337, por esta razón se coloca el asterisco. La comparación entre D y A, B y D , así como entre A y C no muestran diferencias significativas. Cuando se encuentra una diferencia no significativa, se coloca una línea que conecta los tratamientos que no presentan diferencias significativas, tal como vemos en la ilustración siguiente:

Tratamiento	C	A	D	B
Media	4.36	5.32	5.82	7.06

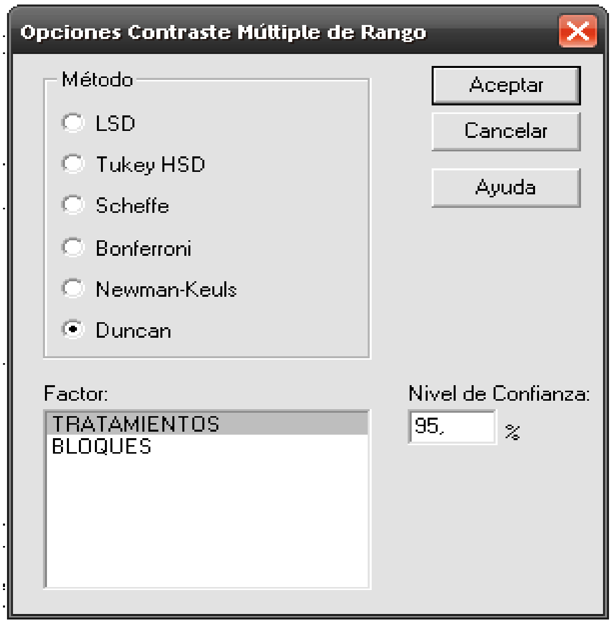
Este procedimiento evita realizar comparaciones entre medias que ya están conectadas mediante una línea.

6.4 SOLUCIÓN DE UN EXPERIMENTO EMPLEANDO EL SOFTWARE ESTADÍSTICO STAGRAPHICS

Después de ingresar los datos en la ventana correspondiente y obtener significancia estadística en el análisis de varianza, se procede a realizar las comparaciones mediante el método de Rangos múltiples de Duncan. En *opciones tabulares* elegimos contrastes múltiples y se aprecia la siguiente ventana



Y en opciones de ventana se elige la prueba de Duncan, como se aprecia en la siguiente figura:



Luego de aceptar, los resultados se aprecian a continuación:

Contraste Múltiple de Rangos de Duncan para RENDIMIENTO según TRATAMIENTOS

Método: 95,0 porcentaje Duncan

TRATAMIENTOS	Recuento	Media LS	Sigma LS	Grupos Homogéneos
C	5	4,36	0,414769	X
A	5	5,22	0,414769	XX
D	5	5,82	0,414769	XX
B	5	7,06	0,414769	X

Contraste	Diferencias
A - B	*-1,84
A - C	0,86
A - D	-0,6
B - C	*2,7
B - D	1,24
C - D	*-1,46

* indica una diferencia significativa.

El StatAdvisor

Esta tabla aplica un procedimiento de comparación múltiple para determinar las medias que son significativamente diferentes unas de otras. La mitad inferior de la salida muestra la diferencia estimada entre cada para de medias. El asterisco que se encuentra al lado de los 3 pares, indica que éstos muestran diferencias estadísticamente significativas a un nivel de confianza 95,0%. En la parte superior de la página, se identifican 3 grupos homogéneos según la alineación del signo X en la columna. Dentro de cada columna, los niveles que tienen signo X forman un grupo de medias entre las cuales no hay diferencias estadísticamente significativas. El método actualmente utilizado para discernir entre las medias es el procedimiento de Duncan de comparaciones múltiples. Con este método, hay un 5,0% de riesgo de considerar uno o más pares como significativamente diferentes cuando su diferencia real es igual a 0.

Realizando la comparación entre el método manual y el proporcionado por el Software se observa que los resultados confirman las diferencias significativas entre ambas formas.

TÉRMINOS CLAVE

Pruebas de significación
Diferencias Mínimas Significativas
Prueba de Rangos Múltiples
Valores Estudiantizados
Resultados Significativos

Ejercicios propuestos

1. Se llevó a cabo un experimento en Bloques completos al azar para estudiar las diferencias significativas de cuatro variedades de Uva y un testigo con fines de elaboración de Pisco. Después de la cosecha se midió el grado de contenido de azúcar, medidos en grados Brix. Los datos se presentan a continuación:

Bloques	Variedades				
	Testigo	V_1	V_2	V_3	V_4
I	23.4	20.3	26.8	19.7	16.4
II	25.6	19.3	27.3	21.0	18.3
III	26.4	18.7	29.4	22.5	17.0
IV	25.0	19.2	28.0	22.8	15.6
V	25.8	18.7	29.0	18.9	20.6

Realizar las pruebas de significación adecuadas:

a) La prueba de DMS entre el testigo y las nuevas variedades.

b) La prueba de Tuckey para observar las diferencias entre las diferentes variedades.

c) La prueba de Duncan para observar las diferencias entre las distintas variedades.

2. En un centro universitario de investigación se comparan el rendimiento de leche que producen animales productores de leche de distintas razas. Se escogieron al azar 30 animales seis de cada raza. Empleando un diseño Completamente al azar, realizar la prueba estadística con los datos que se muestran en la tabla que sigue

Repeticiones	Razas de vacunos(tratamiento)				
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
1	21	22	35	30	29
2	20	23	38	32	30
3	18	24	40	35	30
4	20	21	36	30	31
5	23	25	35	31	32
6	21	24	41	32	31

Realizar las pruebas de significación adecuadas:

a) La prueba de DMS entre las medias de las diferentes razas de vacunos.

b) La prueba de Tuckey para observar las diferencias entre las razas de vacunos de lecha.

c) La prueba de Rangos Múltiples de Duncan para observar las diferencias entre los rendimientos que producen las diferentes razas de vacunos de leche

3. Una empresa de lácteos produce 4 tipos de yogurt enriquecidos con sabores diferentes: Fresa, Mango, Lúcuma y Piña. La gerencia de control de calidad desea realizar pruebas sensoriales considerando las características

de: sabor, aroma, textura y acidez ($muy\ malo = 1$, $extremadamente\ bueno = 9$). Los resultados combinado de todas las características, proporcionado por 10 jueces, se presentan en la siguiente tabla.

Juez	Tipos de yogurt			
	Fresa	Mango	Lúcuma	Piña
1	24	30	36	24
2	28	32	36	20
3	32	35	35	21
4	26	31	34	25
5	27	34	34	23
6	30	30	35	29
7	28	36	36	20
8	32	29	35	19
9	34	28	35	21
10	32	29	34	21

a) Elaborar la tabla del análisis de varianza
b) Si encuentra significación entre las diferencias de medias de los resultados del análisis sensorial, realizar la prueba de DMS
c) Realice la prueba de J. Tukey y describa las diferencias entre las medias de las muestras.
d) Realizar la prueba de Duncan, y describir las diferencias encontradas entre las medias de los tipos de yogurt enriquecido

4. Una empresa dedicada a la consultoría privada está interesado en un programa para calcular fórmulas matemáticas. Le presentan cinco programas para tal fin: P_A, P_B, P_C, P_D, P_E. La empresa en cuestión cuenta con seis tipos de ordenadores y se pretende indagar si el tiempo de cálculo de los cinco programas ofrecidos es el mismo. Para realizar el experimento se emplea un diseño de bloques aleatorizados empleando los cinco programas y los seis ordenadores. Los datos de tiempos promedios a continuación.

Bloques (ordenadores)	p_A	P_B	P_C	P_D	P_E
I	20	15	25	28	12
II	21	16	26	30	15
III	18	12	27	32	9
IV	15	17	24	25	10
V	23	16	25	28	13
VI	24	20	24	29	14

a) Plantear las hipótesis adecuadas
b) Con un nivel de significación del 0.05 probar si los efectos de los programas son iguales.
c) Manifestar sus conclusiones referentes al problema planteado
d) Si existen diferencias significativas realizar la prueba de rangos múltiples de Duncan.

5. Realice la prueba de Tukey para los datos del problema 4, e interpretar sus resultados.

6. Respecto al problema 3,

a) Realizar el análisis estadístico del experimento añadiendo 8 unidades a la columna 4(piña)
b) Si encuentra significación entre las diferencias de medias de los resultados del análisis sensorial, realizar la prueba de DMS
c) Realice la prueba de J. Tukey y describa las diferencias entre las medias de las muestras.
d) Realizar la prueba de Duncan, y describir las diferencias encontradas entre las medias de los tipos de yogurt enriquecido

7. Se realizó un experimento en cultivos de espárrago, en la cual se sembró tres variedades comerciales, bajo un diseño completamente al azar. El experimento por limitaciones en la oferta de semillas, se realizó con desigual número de repeticiones por variedad. Los datos del experimento se muestran a continuación.

Repeticiones	Variedades(Tn/ha)		
	Blanco	Verde	Silvestre
1	10.5	8.0	5.9
2	12.3	9.5	7.3
3	13.2	10.6	8.1
4	14.1	5.6	6.8
5	10.9	8.0	7.4
6	10.8	7.1	8.0
7	11.9	10.0	5.3
8	12.7		5.0
9	14.7		
10	13.0		

a) Realizar el análisis estadístico
b) Realizar, si es pertinente, la prueba de rangos múltiples de Duncan, empleando un nivel de significación del 1%
c) Realizar la prueba de rangos de Tukey y describir las diferencias entre las medias de las tres variedades de espárrago.

8. A cinco muestras de pollos de carne seleccionados previamente en forma aleatoria, se les alimenta con cinco dietas diferentes. Cada muestra consta de seis pollos. Los aumentos de peso durante el tiempo de evaluación son los siguientes:

I	*II*	*III*	*IV*	*V*
20	15	25	28	12
21	16	26	30	15
18	12	27	32	9
15	17	24	25	10
23	16	25	28	13
24	20	24	29	14

a) Utilizando un nivel de significación $\alpha = 0.01$, probar la hipótesis nula de que las cinco dietas tienen el mismo efecto en el aumento de los animales, versus la hipótesis alternativa de que tienen distintos efectos.
b) Si la prueba F resulta significativa, realizar la prueba de rangos múltiples de Duncan, para un nivel de significación de $\alpha = 0.05$.

9. Se conduce un experimento en café, en una región del Perú, se desea probar cinco variedades comerciales de café. El experimento se conduce en un diseño de bloques completos al azar, con cinco bloques. Los datos se pueden observar en la siguiente tabla, (en Kilogramos por hectárea).

Bloques	*Variedades()Kg/ha)*				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
I	9250	14000	12950	11350	11950
II	8100	13950	10789	11400	10900
III	11300	12800	9800	11500	10800
IV	11350	14980	11900	11360	9923
V	11300	11000	12850	11290	8870

a) Realizar el análisis estadístico
b) Realizar la prueba de Rango Múltiples de Tukey
c) A fin de comprobar la consistencia de las pruebas estadísticas, realice la prueba de Rangos Múltiples de Duncan.

10. Una empresa Transnacional desea ingresar al mercado ofertando cinco productos a base de Cacao orgánico del Perú, de marcas diferentes (tratamientos). Antes de su lanzamiento, realiza una prueba de sabor, aroma y acidez, en escala del 1 al 9, ($desde\ completamente\ malo = 1$, $hasta\ completamente\ bueno = 9$).
Para las pruebas sensoriales se convoca a diez expertos en cata (bloques), cuyos resultados conjunto de las características se muestran en la tabla siguiente.
    a) Empleando un nivel del 5%, realizar el análisis de los datos a fin de observar si hay evidencias respecto a las diferencias entre las medias de las marcas de cacao.
    b) Realice la prueba de Rango de Tukey
    c) Realice la prueba de rangos de Duncan

Expertos	Marcas de Cacao				
	A	B	C	D	E
1	32	35	32	34	21
2	28	36	31	38	28
3	26	34	35	36	26
4	30	33	30	35	37
5	25	35	29	37	30
6	28	34	28	25	25
7	27	36	27	34	22
8	22	32	28	33	25
9	22	36	30	34	26
10	23	35	29	36	28

11. Se realizó un experimento, en la que se desea comparar la capacidad de producción de cinco máquinas, en la elaboración de piezas en una jornada de trabajo, bajo un diseño de Bloques Completos al Azar, con cinco bloques. Los bloques son trabajadores de 5, 10,15, 20 y 25 años de experiencia. Los datos se presentan en la tabla siguiente:

Trabajador	Máquinas				
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
T_1	400	416	425	468	450
T_2	410	452	432	472	460
T_3	430	405	413	482	470
T_4	470	409	450	462	480
T_5	412	411	431	418	490

a) Realizar el análisis estadístico, empleando un nivel de significación con $\alpha = 0.01$. y manifestar sus conclusiones si las máquinas son similares en producción de las piezas.
b) Realizar la prueba de rangos múltiples de Tukey, con $\alpha = 0.10$
c) Realizar la prueba de rangos múltiples de Duncan con un $\alpha = 0.10$ y comparar sus resultados.

CAPÍTULO VII

DISEÑO EN CUADRADO LATINO

En este capítulo estudiaremos las particularidades de un diseño que busca controlar los errores de investigación que suelen presentarse en la ejecución de un experimento por las condiciones naturales del lugar en donde se lleva a cabo el mismo, sea campo o laboratorio. La distribución aleatoria de los tratamientos se restringe más ampliamente mediante la agrupación de los mismos, con la formación de las unidades experimentales tanto en columnas como en filas (bloques). Así pues, resulta posible eliminar la variabilidad del error experimental asociada con ambos efectos. En este diseño, cada tratamiento aparece una sola vez, por fila y columna. Así mismo, el diseño proporcionará una comparación más precisa de los efectos del tratamiento que la suministrada por el diseño de bloques al azar, sólo en caso de que exista una variación apreciable asociada con las columnas.

Las Filas y Columnas pueden referirse a la distribución espacial de las unidades experimentales o al orden en el cual los tratamientos se realizan; por ejemplo, en la fig, 7.1 las filas y columnas se refieren a la disposición física de las unidades experimentales, cuatro variedades de ají páprika con fines de exportación. En la fig. 7.2 Los tratamientos *A,B,C,D,E* son cinco diferentes marcas de computadoras por probarse; las columnas son cinco operadores diferentes y las filas cinco días distintas de la semana en que los cinco operadores prueban la computadora. Cada operador prueba una computadora una sola vez y las cinco computadoras en su totalidad son probadas en cada día. De ahí que, los efectos del día y de los operadores, sean fuentes de variación medible, independiente de las computadoras y que puedan eliminarse de la variabilidad total del experimento, reduciendo el error experimental.

Fig. 7.1

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

Un cuadro latino requiere al menos tantas repeticiones como tratamientos existan; por tanto no resulta práctico para experimentos con un gran número de tratamientos. Los cuadros latinos más comúnmente utilizados son aquellos que tienen entre cuatro y ocho tratamientos, con una sola unidad experimental por tratamiento en cada columna y fila

Fig. 7.2

A	B	C	D	E
B	D	E	A	C
C	A	B	E	D
D	E	A	C	B
E	C	D	B	A

Hay ocasiones en que un cuadro latino puede ser ventajoso, incluso cuando las parcelas forman una línea continua. Considérese, por ejemplo, un experimento diseñado para probar cuatro tratamientos de semillas donde las parcelas individuales han de ser hileras particulares a lo largo del área experimental. Debe utilizarse una sembradora con cuatro unidades plantadoras. Las unidades plantadoras pueden diferir en cuanto a la proporción de siembra. Para eliminar el efecto de la plantadora, cada tratamiento de semilla puede asignarse a una unidad sembradora diferente en cada uno de los cuatro bloques, de modo que cada tratamiento es sembrado el mismo número de veces por cada unidad de siembra.
Cuando el número de tratamientos se reduce y existen buenas razones para creer que se registrará un apreciable efecto de columna, la variación puede eliminarse en dos direcciones mediante la utilización de dos cuadros latinos (con asignaciones aleatorias independientes). En resumen, las características de un diseño cuadrado latino, proporcionado por Little[12] son:

1. Las unidades experimentales se distribuyen en grupos, bajo dos criterios de homogeneidad dentro de la fila y dentro de la columna y criterio de heterogeneidad en otra forma.
2. En cada fila y en cada columna, el número de unidades es igual al número de tratamientos.
3. Los tratamientos son asignados al azar en las unidades experimentales dentro de cada fila y dentro de cada columna.
4. El número de filas es igual al número de columnas y al número de tratamientos.

[12] Little, T, Hills, J. (1975). Métodos Estadísticos para la Investigación en Agricultura. Editorial Trillas, México.

5. Para realizar el análisis estadístico de la prueba *t*, Duncan y Tukey, se procede como si se tratara de diseños completos al azar o de bloques al azar. La desviación estándar de la diferencia de promedios y la desviación estándar del promedio, están en función del cuadrado medio del error experimental.

El nombre de este diseño se debe a Ronald A. Fisher[13] y puede afirmarse con toda autoridad que un cuadrado latino es una especie de matriz $f * c$ en la que cada casilla está ocupada por uno de la *n* símbolos, de tal modo que cada uno de ellos aparece exactamente una vez en cada columna y en cada fila. Así mismo, un cuadrado latino puede escribirse a manera de una tripleta para señalar un valor particular del experimento (*f, c, x*), donde *f* es la fila, *c* la columna y *x* el símbolo del valor de una celda. Por ejemplo, para el cuadrado latino de la fig. 7.1, el arreglo ortogonal sería:

{ (1,1,A); (1,2,B); (1,3,C); (1,4,D); (2,1,B); (2,2,C); (2,3,D); (2,4,A);(3,1,C); (3,2,D); (3,3,A); (3,4,B); (4,1,D); (4,2,A); (4,3,B); (4,4,C) }

En la cual, por ejemplo, la tripleta (*1, 3, c*), representa que el valor de la fila *1* y columna *3* es *c*. La representación de un cuadrado latino se puede escribir en términos de un arreglo ortogonal, quedando como, f^2 tripletas de la forma *(f, c, x)*

7.1 MUESTREO ALEATORIO DE UN DISEÑO CUADRADO LATINO

Para ilustrar el modo de asignar cada nivel de tratamiento a las unidades experimentales, vamos a describir un experimento en el que deseamos asignar cinco niveles de tratamiento que se requiere, en forma aleatoria. Se trata de un experimento con cinco niveles *A, B, C, D, E.* En primer lugar, aleatoriamente se ordenan las filas y columnas con ayuda de la tabla de números aleatorios, y el arreglo queda como se muestra en la tabla 7.1. Recordar que el diseño en cuadrado latino, tienen dos restricciones relevantes, filas y columnas.

Tabla 7.1 Reordenación aleatoria de un diseño cuadrado latino $5 * 5$

FILAS	COLUMNAS				
	4	1	2	3	5
2	A	B	C	D	E
4	B	A	D	E	C
1	C	D	E	B	A
3	D	E	A	C	B
5	E	C	B	A	D

Vamos a proceder a mostrar el resultado de un experimento en cuadrado latino $5 * 5$, que se llevó a cabo en un valle del Perú, en la que se condujo un experimento de

[13] Científico matemático, estadístico y biólogo evolutivo, es autor *The Design of Experiments(1935)*

cinco variedades de ají con potencial exportador, los resultados se muestran en la tabla 7.2, teniendo como origen a la tabla 7.1, con ordenamiento aleatorio. Los tratamientos son cinco variedades de ají de exportación cuyos rendimientos en tn/ha se observa en cada una de las celdas de la tabla 7.2

Tabla 7.2 Resultados de cosecha de ají páprika ordenado aleatoriamente (Tn/ha)

FILAS	COLUMNAS					Total Filas
	1	2	3	4	5	
1	D 9.8	E 9.4	B 8.7	C 8.9	A 9.9	46.7
2	B 6.4	C 10.4	D 8.0	A 7.1	E 9.9	41.8
3	E 10.2	A 9.8	C 7.8	D 10.0	B 10.0	47.8
4	A 7.9	D 8.9	E 9.0	B 6.2	C 7.4	39.4
5	C 7.5	B 10.1	A 9.9	E 8.2	D 8.9	44.6
Total columna	41.8	48.6	43.4	40.4	46.1	220.3
Total Tratamientos	A 44.6	B 41.4	C 42.0	D 45.6	E 46.7	

7.2 MODELO DE ANÁLISIS DE VARIANZA

El modelo estadístico del DCL, obedece a las fuentes de variabilidad y los factores que intervienen. Debido a la media global, al efecto del tratamiento, efecto de columnas, efecto de filas y al error experimental. A continuación se presenta el modelo, mediante la ecuación 7.1

$$y_{ijk} = \mu + \tau_{(k)} + c_i + f_j + \varepsilon_{ij(k)} \qquad \text{ec. 7.1}$$

Donde,

Y_{ijk}: son las observaciones del experimento

μ: el efecto de la media general

$\tau_{(k)}$: efecto del k − ésimo tratamiento

f_j: efecto de la j − ésima fila

c_i: efecto de la i − ésima columna

$e_{ij(k)}$: error experimental

7.3 ANÁLISIS DE VARIANZA

El análisis de varianza, en el caso de este diseño, está basado en cuatro fuentes de variabilidad, debido a los efectos del tratamiento o factor bajo estudio, debido a efectos de columnas, efectos de filas y el error experimental. Estos componentes se calculan siguiendo los modelos de los diseños anteriores, de acuerdo a los siguientes pasos:

1º Calcular el término de corrección, mediante:

$$TC = \frac{\sum G^2}{N} = \frac{(\text{Gran total})^2}{\text{Número total de unidades experimentales}} \qquad \text{ec. 7.2}$$

2º Calcular la Suma de cuadrados del total

$$SCTotal = \sum Y_{ij(k)}^2 - TC \qquad \text{ec. 7.3}$$

3º Calcular la suma de cuadrados de los tratamientos

$$SCtratamientos = \frac{\sum Y_{(k).}^2}{f} - TC \qquad \text{ec. 7.4}$$

4º Calcular la suma de cuadrados de las columnas

$$SCColumnas = \frac{\sum Y_{i.}^2}{f} - TC \qquad \text{ec. 7.5}$$

5º Suma de cuadrados de filas

$$SC\ Filas = \frac{\sum Y_{.j}^2}{c} - TC \qquad \text{ec. 7.6}$$

6º Suma de Cuadrados del error

$$SCError = SCT - SCC - SCF - SCTr \qquad \text{ec. 7.7}$$

en consecuencia el análisis de varianza para un diseño en cuadrado latino se puede elaborar de acuerdo a la tabla 7.3

Como puede notar el lector, en la tabla 7.3, se muestra que la prueba *F* sólo se aplica para el tratamiento o factor, puesto que es el objeto bajo investigación, las componentes, columnas y filas se usan sólo para reducir los posibles errores que pueden presentarse en el trabajo de campo.
Los cuadrados medios resultan de dividir cada suma de cuadrado por sus respectivos grados de libertad, tal como se aprecia seguidamente

Cuadrado medio de tratamientos

$$CMtratamiento = \frac{\text{SCtr}}{\text{c} - 1}$$

Cuadrado medio de columnas

$$CMcolumnas = \frac{SCC)}{c - 1}$$

Tabla 7.3 ANVA para un diseño en Cuadrado latino

Fuente de variabilidad	**GL**	**SC**	**CM**	F_c
Columnas	$c-1$	$SCC = \frac{\sum Y_{i.}^2}{f} - TC$	$\frac{SCC}{c-1}$	
Filas	$c-1$	$SCF = \frac{\sum Y_{.j}^2}{c} - TC$	$\frac{SCF}{c-1}$	
Tratamiento	$c-1$	$SCtr = \frac{\sum Y_{(k)}^2}{c} - TC$	$\frac{SCtr}{c-1}$	$\frac{CMtr}{CME}$
Error	$(c-1)(c-2)$	$SCE = SCT - SCC - SCF - SCtr$	$\frac{SCE}{(C-1)(c-2)}$	
Total	c^2-1	$SCT = \sum Y_{ij(k)}^2 - TC$		

Cuadrado medio de filas

$$CMF = \frac{\mathrm{SCF}}{\mathrm{c}-1}$$

Cuadrado medio del error

$$CME = \frac{\mathrm{SCE}}{(\mathrm{c}-1)(\mathrm{c}-2)}$$

7.4 VENTAJAS DEL DISEÑO CUADRADO LATINO

Para analizar las ventajas que presenta un diseño, debe referirse a otros diseños más simples, como es el caso de diseño completamente al azar de una vía y el diseño de bloques al zar. En ese sentido, este diseño tiene las siguientes ventajas frente a los diseños mencionados, y son:

1º Es un diseño muy preciso, debido al control que ejerce sobre el error experimental en dos direcciones.
2º El análisis estadístico, aparentemente con mayor dificultad que los anteriores, sin embargo es sencillo.
3º En el supuesto caso en que aparezcan parcelas perdidas, el análisis no se complica, puesto que puede estimarse el valor perdido.
4º Puede medirse la eficiencia del diseño respecto al diseño de bloques al azar, mediante la estimación de la variabilidad.

También es preciso hacer notar que una de las desventajas de este diseño es, que el número de niveles de los tratamientos están limitados al número de filas y columnas, así como que los grados de libertad del error experimental son limitados cuando se prueban pocos tratamientos.

7.5 USOS DEL DISEÑO CUADRADO LATINO

Este diseño, por su naturaleza de controlar los posibles errores en dos direcciones se usa en una gran variedad de procesos experimentales, en la industria, en la medicina, en problemas de mercadeo, sociología, en Psicología, en agricultura, etc. En la agricultura se emplea en experimentos de campo, invernadero, laboratorio. Ronald Fisher, el reconocido y famoso estadístico, al referirse a este diseño, afirmaba: "si la experimentación estuviera restringida a la comparación de 4 a 8 tratamientos o variedades, este diseño no sólo sería el principal sino el diseño empleado universalmente"
Al igual que en el caso de los diseños en bloques, en éste, la evaluación de significancia que interesa a la investigación es entre las medias de tratamientos o factor, ya que las columnas como las filas actúan como reductores de los errores de experimentación.

Seguidamente procedemos a resolver el ejemplo considerando los datos que se presentan en la tabla 7.2,

El orden del cálculo, sigue el mismo modelo que en los casos anteriores, es decir, para diseños completamente al azar, bloques completos la azar. En primer lugar se procede a calcular el término de corrección, buscando el cociente entre el gran total y el número total de observaciones consideradas en el experimento, de acuerdo con ecuación 7.2

1º $TC = \frac{Gran\ total}{N} = \frac{220.3^2}{25} = 1941.28$

2º $SCTotal = 9.8^2 + 6.4^2 + 10.2^2 + \cdots + 10^2 + 7.4^2 + 8.9^2 - 1941.28 = 37.03$

3º $SCTrat = \frac{44.6^2+41.4^2+42.0^2+45.6^2+46.7^2}{5} - 1941.28 = \frac{9727.37}{5} - 1941.28 = 4.194$

4º $SCColum = \frac{41.8^2+48.6^2+43.4^2+40.4^2+46.1^2}{5} - 1941.28 = 1950.026 - 1941.28 =$
$= 8.746$

5º $SCFilas = \frac{46.7^2+41.8^2+47.8^2+39.4^2+44.6^2}{5} - 1941.28 = 1950.898 - 1941.28 =$
$= 9.618$

6º $SCError = 37.03 - 4.194 - 8.746 - 9.618 = 14.472$

Tabla 7.4 ANVA para el ejemplo de cosecha de páprika

F de variabilidad	*G.L.*	*S.C.*	*C.M.*	*F*
Entre Columnas	4	8.746	2.1865	
Entre Filas	4	9.618	2.4045	
Entre Tratamiento	4	4.194	1.0485	0.8694
Error	12	14.472	1.206	
Total	24	37.03		

De acuerdo a los resultados mostrados en la tabla 7.4 del análisis de varianza, no se observa diferencias estadísticas significativas entre las variedades de ají que se han probado, puesto que el valor de *F=0.8694,* es bastante cercano a uno lo que demuestra que las varianza entre tratamientos y dentro de tratamientos son muy parecidos. A efectos de probar, y a fin de que el lector observe los procedimientos de prueba, a continuación vamos a emplear la prueba de la DSM, con la finalidad de corroborar los resultados encontrados en el análisis de varianza.

7.6 PRUEBA DE DSM

Para realizar la prueba de Diferencias Mínimas Significativas, y comparar las medias de las variedades de ají, recurrimos a la ecuación

$$DSM = t.\sqrt{\frac{2(CME)}{c}} = \qquad \text{ec. 7.8}$$

Buscamos el valor de t en la tabla B del anexo, con un nivel de significación de 0.05 y 12 grados de libertad del error, es decir, $t_{(0.05,12)} = 1.782$

Entonces el valor de DSM es:

$$DSM = (1.782)\left(\sqrt{\frac{2(1.206)}{5}}\right) = 1.2377$$

Contra 1.2377 se prueban las diferencias de las medias de las variedades de ají, las mismas que se distribuyen en la matriz siguiente:

	$A = 8.92$	$B = 8.28$	$C = 8.40$	$D = 9.12$	$E = 9.34$
$A = 8.92$			-		
$B = 8.28$	0.64	-	-	-	-
$C = 8.40$	0.52	0.12	-	-	-
$D = 9.12$	0.20	0.84	0.72	-	-
E=9.34	0.42	1.06	0.94	0.22	-

En la matriz anterior no se observa diferencias significativas para ninguna de las comparaciones entre medias de variedades de ají, lo que refuerza los resultados alcanzados mediante la prueba *F* del método del análisis de varianza.

7.7 USO DEL PAQUETE ESTADÍSTICO STATGRAPHICS

Como en el capítulo anterior, este paquete incluye procedimientos para realizar el análisis de varianza en diseños cuadrados latinos, los factores o tratamientos, columnas, hileras y las respuestas se deben ingresar en el editor de datos. Se crean columnas en el editor para cada dirección del experimento, es decir, *columnas e hileras,* así como una columna para la respuesta del experimento, en este caso el rendimiento de ají por parcela.
La rutina a seguir para trabajar en este paquete es: *Comparación→ Análisis de varianza→ anova multifactorial*. Los resultados generados por el paquete se aprecian en la fig. 7.3

Fig. 7.3 Resultados proporcionados por el paquete STATGRAPHICS

Análisis de la Varianza para Rendimiento - Sumas de Cuadrados de Tipo III

Fuente	Suma de Cuadrados	GL	Cuadrado Medio	Cociente F	P-Valor
EFECTOS PRINCIPALES					
A:tratamiento	4,1904	4	1,0476	0,87	0,5106
B:columnas	8,7424	4	2,1856	1,81	0,1915
C:filas	9,6144	4	2,4036	1,99	0,1599
RESIDUOS	14,4792	12	1,2066		
TOTAL	37,0264	24			

Los cocientes F están basados en el error cuadrático medio residual.

El StatAdvisor

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de *Rendimiento* en las contribuciones debidas a varios factores. Puesto que se ha elegido la suma de cuadrados Tipo III (valor por defecto), se ha medido la contribución de cada factor eliminando los efectos del resto de los factores. Los P-valores comprueban la importancia estadística de cada uno de los factores. Dado que ningún P-valor es inferior a 0,05, ninguno de los factores tiene efecto estadísticamente significativo en Rendimiento para un nivel de confianza del 95,0%.

Tabla de Medias por mínimos cuadrados para *Rendimiento*
con 95,0 Intervalos de confianza

Nivel	Frecuencia	Media	Error Estándar	Límite Inferior	Límite Superior
Media Total	25	8,812			
tratamiento					
1	5	8,92	0,491243	7,84967	9,99033
2	5	8,28	0,491243	7,20967	9,35033
3	5	8,4	0,491243	7,32967	9,47033
4	5	9,12	0,491243	8,04967	10,1903
5	5	9,34	0,491243	8,26967	10,4103
columnas					
1	5	8,36	0,491243	7,28967	9,43033
2	5	9,72	0,491243	8,64967	10,7903
3	5	8,68	0,491243	7,60967	9,75033
4	5	8,08	0,491243	7,00967	9,15033
5	5	9,22	0,491243	8,14967	10,2903
filas					
1	5	9,34	0,491243	8,26967	10,4103
2	5	8,36	0,491243	7,28967	9,43033
3	5	9,56	0,491243	8,48967	10,6303
4	5	7,88	0,491243	6,80967	8,95033
5	5	8,92	0,491243	7,84967	9,99033

El StatAdvisor

Esta tabla muestra los Rendimientos medios para cada nivel de factores. También presenta el error estándar de cada media, lo cual es una medida de su variabilidad en la muestra. Las dos columnas de la derecha muestran 95,0% intervalos de confianza para cada una de las medias. Puede visualizar estas medias e intervalos seleccionando Gráfico de Medias de la lista de Opciones Gráficas.

Contrastes Múltiples de Rangos para Rendimiento según tratamiento

Método: 95,0 porcentaje LSD

tratamiento	Recuento	Media LS	Sigma LS	Grupos Homogéneos
2	5	8,28	0,491243	X
3	5	8,4	0,491243	X
1	5	8,92	0,491243	X
4	5	9,12	0,491243	X
5	5	9,34	0,491243	X

Contraste	Diferencias	+/- Límites

1 - 2	0,64	1,51367
1 - 3	0,52	1,51367
1 - 4	-0,20	1,51367
1 - 5	-0,42	1,51367
2 - 3	-0,12	1,51367
2 - 4	-0,84	1,51367
2 - 5	-1,06	1,51367
3 - 4	-0,72	1,51367
3 - 5	-0,94	1,51367
4 - 5	-0,22	1,51367

* indica una diferencia significativa.

El StatAdvisor

Esta tabla aplica un procedimiento de comparación múltiple para determinar las medias que son significativamente diferentes unas de otras. La mitad inferior de la salida muestra la diferencia estimada entre cada par de medias. No hay diferencias estadísticamente significativas entre ningún par de medias a un nivel de confianza.95,0%. En la parte superior de la página, se identifica un grupo homogéneo según la alineación del signo X en la columna. Dentro de cada columna, los niveles que tienen signo X forman un grupo de medias entre las cuales no hay diferencias estadísticamente significativas. El método actualmente utilizado para discernir entre las medias es el procedimiento de las menores diferencias significativas de Fisher (LSD). Con este método, hay un 5,0% de riesgo de considerar cada par de medias como significativamente diferentes cuando la diferencia real es igual a 0.

En la fig. 7.3 se puede apreciar los resultados proporcionados por el paquete statgraphics, en ello se observa que en la tabla del ANVA, igualmente no se aprecia diferencias estadísticas significativas en los niveles de tratamientos, es decir, entre variedades. Así mismo, se presenta una tabla de medias tanto para las variedades, como para columnas y filas, pero como lo hemos manifestado antes, sólo interesa el resultado de los tratamientos. Igualmente, se ratifica las conclusiones enunciadas cuando desarrollamos en forma manual el ejemplo 7.1. Con este paquete, en las comparaciones entre variedades, no se encuentra diferencias marcadas, por lo que se acepta la hipótesis nula que las medias de las cinco variedades de ají son homogéneas.
En la fig. 7.4, se aprecia los rendimientos de ají alcanzados por cada variedad, en ella puede observarse que los rendimientos son bastante homogéneos, tal como se puede notar con mayor claridad en la fig. 7.5

Fig. 7.4 Rendimiento de aji por variedad

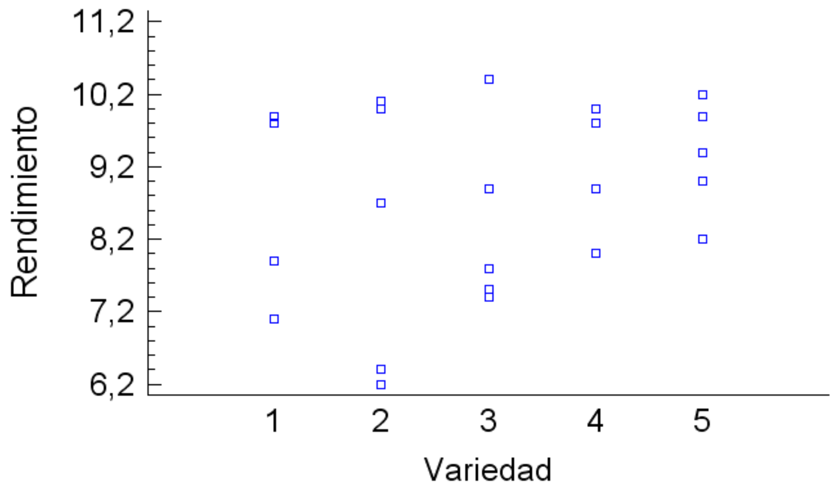
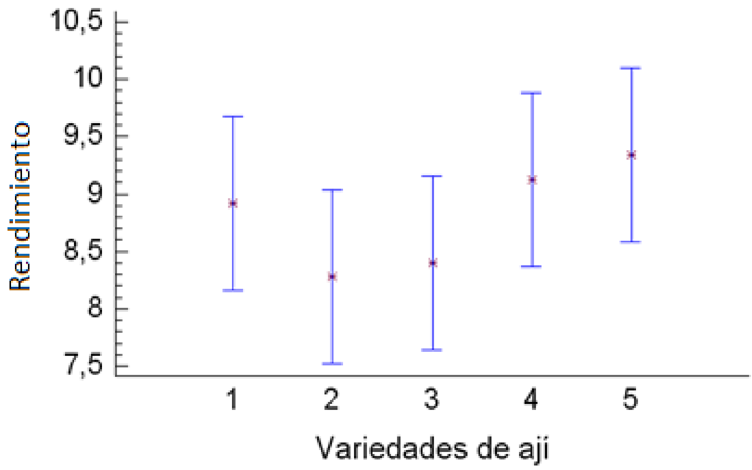


Fig. 7.5 gráfica de medias e intervalos de confianza



Ejemplo 7.2 Se ha probado cinco tipos de raciones muy especiales para ganado porcino (tratamiento). Para efectos de estudiar las bondades de estas raciones, se ha diseñado un experimento en cuadrado latino, en la cual se emplearon cinco razas de ganado y cinco días de la semana como columnas y filas respectivamente, empleando estos factores solamente como reductores de los posibles errores experimentales que pudieran aparecer en el experimento. Los datos de aumento de peso en Kg por animal se aprecian en la tabla 7.5

Tabla 7.5 Aumento de peso en cerdos por tipo de Ración recibida

Filas	Columnas					Total Filas
	1	2	3	4	5	
1	$A = 15$	$B = 14$	$C = 10$	$D = 12$	$E = 12$	*63*
2	$B = 10$	$C = 12$	$D = 9$	$E = 12$	$A = 18$	*61*
3	$C = 13$	$D = 10$	$E = 12$	$A = 16$	$B = 15$	*66*
4	$D = 11$	$E = 15$	$A = 16$	$B = 13$	$C = 13$	*68*
5	$E = 13$	$A = 17$	$B = 11$	$C = 10$	$D = 12$	*63*
Total columnas	*62*	*68*	*58*	*63*	*70*	*321*
Total tratamiento	$A = 82$	$B = 63$	$C = 58$	$D = 54$	$E = 64$	

Solución:

1º Plantear las hipótesis

$$H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu_E$$

$$H_1: \mu_A \neq \mu_B \neq \mu_C \neq \mu_D \neq \mu_E$$

2º Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

ANÁLISIS ESTADÍSTICO

1º Término de corrección:

$$TC = \frac{321^2}{25} = 4121.64$$

2º Suma de cuadrado de totales:

$$SCT = 15^2 + 10^2 + 13^2 + \cdots + 15^2 + 13^2 + 12^2 - 4121.64 = 137.36$$

3º Suma de cuadrado de tratamientos:

$$SCt = \frac{82^2+63^2+58^2+54^2+64^2}{5} - 4121.64 = 92.16$$

4º Suma de cuadrado de columnas:

$$SCC = \frac{62^2+68^2+58^2+63^2+70^2}{5} - 4121.64 = 18.56$$

5º Suma de cuadrado de filas:

$$SCF = \frac{63^2+61^2+66^2+68^2+63^2}{5} - 4121.64 = 6.16$$

6º suma de cuadrados del error:

$$SCE = 137.36 - 92.16 - 18.56 - 6.16 = 20.48$$

GRADOS DE LIBERTAD

$$Tratamientos = 5 - 1 = 4$$

$$Columnas = 5 - 1 = 4$$

$$Filas = 5 - 1 = 4$$

$$Error = (5-1)(5-2) = (4)(3) = 12$$

$$Totales = 5^2 - 1 = 24$$

ANÁLISIS DE VARIANZA

La tabla del análisis de varianza se elabora en base a los cálculos realizados en forma manual empleando las expresiones que se formularon en las ecuaciones 7.2 al 7.7. Posterior a este procedimiento se calculan los cuadrados medios, cuyos valores aparecen en la tabla 7.6 del análisis de varianza.

Tabla 7.6 Análisis de varianza para tipos de raciones

Fuente De variabilidad	*GL*	*SC*	*CM*	*F*	*F*
Entre Tratamiento	4	92.16	23.04	13.4997	3.26*
Entre Columnas	4	18.56	4.64		
Entre Filas	4	6.16	1.54		
Error experimental	12	20.48	1.7067		
Total	24	137.36			

En la tabla 7.6, de acuerdo a los resultados que se observan, puede concluirse que existen diferencias significativas entre efectos de los tipos de raciones que

ingirieron los ganados porcinos en el experimento. En la tabla, el asterisco (*) significa que se ha llegado a dicha conclusión, por tanto, puede procurarse emplear esta ración en la alimentación de estos ganados. Como puede observar el lector, no analizamos los resultados para las columnas y filas debido, como se ha afirmado, solamente se emplean como reductores de los posibles errores experimentales que pudiesen presentar en el transcurso de la investigación.
Este resultado permitirá rechazar la hipótesis nula, que plantea la igualdad de las medias, es decir, *no hay efecto de las raciones empleadas.*

USO DEL PAQUETE STATGRAPHICS

Ahora como en casos anteriores vamos a encontrar la solución empleando nuestro paquete statgraphics. Como se indicó en anteriores casos, se ingresan los daros en el editor de datos. Como se observa a continuación en la fig 7.6, proporcionado por el paquete.

Fig. 7.6 Resultados proporcionados por Statgraphics

Resumen del Procedimiento

Variable dependiente: Peso
Factores:
Tratamiento
Columnas
Filas
Número de casos completos: 25

El StatAdvisor

Este procedimiento realiza un análisis multifactorial de la varianza para Peso. Realiza varios tests y gráficos para determinar qué factores tienen un efecto estadísticamente significativo en Peso.
Teniendo datos suficientes, también analiza las interacciones significativas entre los factores. Los *F-tests* en la tabla ANOVA le permitirán identificar los factores significantes. Para cada factor significante, los *Tests* de Rangos Múltiples le indicarán qué medias son significativamente diferentes de otras. El Gráfico de Medias y el Gráfico de Interacción le ayudarán a interpretar los efectos significantes. Los Gráficos de Residuos le ayudarán a juzgar si los datos violan las asunciones subyacentes en el análisis de la varianza.

Análisis de la Varianza para Peso - Sumas de Cuadrados de Tipo III

Fuente	Suma de Cuadrados	GL	Cuadrado Medio	Cociente-F	P-Valor
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Tratamiento	92,16	4	23,04	13,50	0,0002
B:Columnas	18,56	4	4,64	2,72	0,0803
C:Filas	6,16	4	1,54	0,90	0,4928

RESIDUOS	20,48	12	1,70667
TOTAL	137,36	24	

Los cocientes F están basados en el error cuadrático medio residual.

El StatAdvisor

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de Peso en las contribuciones debidas a varios factores. Puesto que se ha elegido la suma de cuadrados Tipo III (valor por defecto), se ha medido la contribución de cada factor eliminando los efectos del resto de los factores. Los P-valores comprueban la importancia estadística de cada uno de los factores. Dado que un p-valor es inferior a 0,05, este factor tiene efecto estadísticamente significativo en Peso para un 95,0%.

Tabla de Medias por mínimos cuadrados para Peso
con 95,0 Intervalos de confianza

Nivel	Frecuencia	Media	Error Estándar	Límite Inferior	Límite Superior
Media Total	25	12,84			
Tratamiento					
1	5	16,4	0,584237	15,1271	17,6729
2	5	12,6	0,584237	11,3271	13,8729
3	5	11,6	0,584237	10,3271	12,8729
4	5	10,8	0,584237	9,52705	12,0729
5	5	12,8	0,584237	11,5271	14,0729
Columnas					
1	5	12,4	0,584237	11,1271	13,6729
2	5	13,6	0,584237	12,3271	14,8729
3	5	11,6	0,584237	10,3271	12,8729
4	5	12,6	0,584237	11,3271	13,8729
5	5	14,0	0,584237	12,7271	15,2729
Filas					
1	5	12,6	0,584237	11,3271	13,8729
2	5	12,2	0,584237	10,9271	13,4729
3	5	13,2	0,584237	11,9271	14,4729
4	5	13,6	0,584237	12,3271	14,8729
5	5	12,6	0,584237	11,3271	13,8729

El StatAdvisor

Esta tabla muestra el Peso medio para cada nivel de factores.

También presenta el error estándar de cada media, lo cual es una medida de su variabilidad en la muestra. Las dos columnas de la derecha muestran 95,0% intervalos de confianza para cada una de las medias. Puede visualizar estas medias e intervalos seleccionando Gráfico de Medias de la lista de Opciones Gráficas.

Contraste Múltiple de Rangos para Peso según Tratamiento

Método: 95,0 porcentaje Duncan

Tratamiento	Recuento	Media LS	Sigma LS	Grupos Homogéneos
4	5	10,8	0,584237	X
3	5	11,6	0,584237	XX
2	5	12,6	0,584237	XX
5	5	12,8	0,584237	X
1	5	16,4	0,584237	X

Contraste	Diferencias
1 - 2	*3,8
1 - 3	*4,8
1 - 4	*5,6
1 - 5	*3,6
2 - 3	1,0
2 - 4	1,8
2 - 5	-0,2
3 - 4	0,8
3 - 5	-1,2
4 - 5	*-2,0

----
* indica una diferencia significativa.

El StatAdvisor

Esta tabla aplica un procedimiento de comparación múltiple para determinar las medias que son significativamente diferentes unas de otras. La mitad inferior de la salida muestra la diferencia estimada entre cada par de medias. El asterisco que se encuentra al lado de los 5 pares, indica que éstos muestran diferencias estadísticamente significativas a un nivel de confianza 95,0%. En la parte superior de la página, se identifican 3 grupos homogéneos según la alineación del signo X en la columna. Dentro de cada columna, los niveles que tienen signo X forman un grupo de medias entre las cuales no hay diferencias estadísticamente significativas. El método actualmente utilizado para discernir entre las medias es el procedimiento de Duncan de comparaciones múltiples. Con este método, hay un 5,0% de riesgo de considerar uno o más pares como significativamente diferentes cuando su diferencia real es igual a 0.

En las figuras 7.7 y 7.8 se observan los gráficos de los pesos obtenidos por cada nivel de tratamiento o raciones aplicados a los ganados porcinos, así como las medias de los aumentos de peso de los animales.

Fig.7.7 Gráfico de aumento de peso por raciones

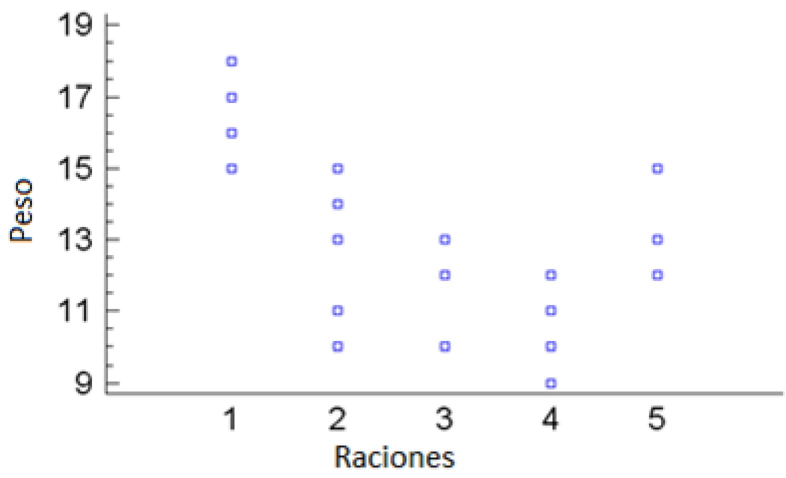
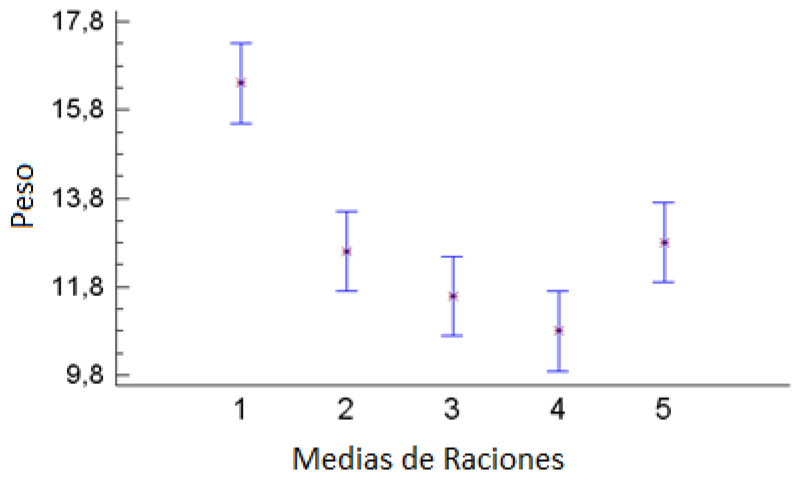


Fig. 7.8 Gráfico de medias e intervalos



7.8 ANÁLISIS DE UN EXPERIMENTO CON DATOS PERDIDOS

La sencillez del diseño en cuadrado latino, permite que aún, cuando por casos fortuitos, se observen datos faltantes, puede estimarse aquel valor con procedimientos similares a diseños anteriores, con la excepción natural de variaciones en la fórmula. Así por ejemplo, cuando se pierde un dato, debe estimarse mediante la ec. 7.9

$$Y = \frac{c(F+C+T)-2G}{(c-1)(c-2)} \qquad \text{ec. 7.9}$$

Donde: *F, C, T* son totales de Filas, columnas y tratamientos, que contienen los datos perdidos y *G* es el gran total, mientras que *c* es el número de columnas, filas y tratamientos.
A efecto de realizar comparaciones entre la media del tratamiento con dato perdido y otro que está exento de esto, el error estándar estimado, se calcula mediante la ec. 7.10, que se observa a continuación:

$$e.e. = \sqrt{s^2\left(\frac{2}{c} + \frac{1}{(c-1)(c-2)}\right)} \qquad \text{ec. 7.10}$$

Cuando faltan dos datos perdidos, podemos emplear el método descrito en la sección 5.8.2 del capítulo V, es decir, emplear repetidamente la ecuación 7.9, estimando previamente un valor perdido. Para el cálculo del análisis de varianza, tener en cuenta que debe restarse un grado de libertad de los grados de liberad del error, por cada dato perdido.

Ejemplo 7.3 Se ha realizado un experimento en cuadrado latino con cinco tratamientos, cinco filas y cinco columnas. En el transcurso del proceso se perdió un dato. Estimar el valor perdido, empleando la ecuación adecuada, con datos registrados en la tabla 7.7
El primer paso antes de realizar el análisis estadístico, es estimar el valor perdido *Y*, que se ubica en la posición (3, 3, Y), es decir, la columna 3, la fila 3 y el nivel de tratamiento *B.*

Tabla 7.7 Registro de un diseño en cuadrado Latino
Con un dato perdido

Filas	Columnas					Total Fila
	1	2	3	4	5	
I	50(C)	55 (D)	65 (E)	64 (A)	70 (B)	304
II	54 (D)	58 (E)	60 (A)	65 (B)	54 (C)	291
III	56 (E)	51 (A)	**Y** (B)	62 (C)	62 (D)	231+Y
IV	54 (A)	50 (B)	53 (C)	62 (D)	60 (E)	279
V	51 (B)	49 (C)	63 (D)	62 (E)	64 (A)	289
Total Columna	265	263	241+Y	315	310	
Total Tratamiento	A=293	B=236+Y	C=268	D=296	E=301	1394+Y

Los datos pertinentes para el empleo de la ecuación 7.8 son:
$c = 5 \quad F = 231 \quad C = 241 \quad T = 236 \quad G = 1394$

Reemplazando en la ecuación se tiene:

$$Y = \frac{5(231+241+236)-2(1394)}{(5-1)(5-2)} = \frac{752}{12} = 62.67$$

Con el valor estimado se procede a realizar el análisis del experimento, con las consideraciones señaladas.

Filas	Columnas					Total Fila
	1	2	3	4	5	
I	50(C)	55 (D)	65 (E)	64 (A)	70 (B)	304
II	54 (D)	58 (E)	60 (A)	65 (B)	54 (C)	291
III	56 (E)	51 (A)	**62.67**(B)	62 (C)	62 (D)	293.67
IV	54 (A)	50 (B)	53 (C)	62 (D)	60 (E)	279
V	51 (B)	49 (C)	63 (D)	62 (E)	64 (A)	289
Total Columna	265	263	303.67	315	310	
Total Tratamiento	A=293	B=298.67	C=268	D=296	E=301	1456.67

Después de realizar los cálculos de acuerdo a las ecuaciones pertinentes, el análisis de varianza queda de la manera que se presenta en al tabla 7.8

Tabla 7.8 Análisis de la Varianza para Rendimiento

Fuente de variabilidad	GL	SC	CM	F
Columnas	4	511,394	127,849	
Filas	4	64,7142	16,1786	
Tratamientos	4	143,254	35,8136	3.763 *
Error	**11**	104,667	9.51518	
Total	23	824,029		

En la tabla 7.8 del ANOVA se observa cómo, se descompone la variabilidad de la variable dependiente *Rendimiento,* en las contribuciones debidas a varios factores, *columnas, filas y tratamiento;* puesto que se ha elegido la suma de cuadrados Tipo III (valor por defecto), se ha medido la contribución de cada factor eliminando los efectos del resto de los factores. Dado que el valor calculado de F es 3.763, este resulta mayor que el valor tabulado de F de la tabla D del anexo, 3.36, por lo que se concluye que el tratamiento tiene efecto estadísticamente significativo en Rendimiento para un 95,0% de confianza.
Así mismo, como se puede notar, en los grados de libertad del error, se disminuyó en 1, por eso resulta igual a 11, aún en esa condición la hipótesis nula se rechaza debido a la significación estadística.

7.9 EFICIENCIA DEL DISEÑO CUADRADO LATINO CON RESPECTO AL DISEÑO DE BLOQUES

A fin de garantizar el uso eficiente del diseño en cuadrado latino, frente a un diseño de bloques, se mide la efectividad del doble agrupamiento en bloques de este diseño. Puesto que el propósito de todo experimento es mejorar en el análisis de los datos, se comparan la eficiencia del diseño cuadrado latino respecto a un

diseño de menor dificultad, que en esta ocasión es el de bloques. Para cumplir el propósito, seguimos el siguiente procedimiento:
1º Cuando se considera a las columnas como bloques. Entonces la expresión:

$$\widehat{CME}_{BA} = \frac{N_c E_c + (N_t + N_e) E_e}{N_t + N_c + N_e} \qquad \text{ec. 7.11}$$

Representa una estimación del cuadrado medio del error. En la que $E_c\, y\, E_e$, son los cuadrados medio para columnas y error respectivamente. En tanto, N_t, N_c, N_e son los grados de libertad de tratamientos, de columnas y de error.

2º Cuando se considera a las filas como bloques, empleamos la ecuación 7.12, que se muestra seguidamente:

$$\widehat{CME}_{BA} = \frac{N_f E_f + (N_t + N_e) E_e}{N_t + N_f + N_e} \qquad \text{ec. 7.12}$$

Donde: $E_f\, y\, E_e$, son los cuadrados medios de filas y del error, mientras que N_t, N_f, N_e , son los grados de libertad de tratamientos, de filas y del error.
Estas dos expresiones, la ec. 7.11 y 7.12, son estimaciones del cuadrado medio del error si se hubiese empleado el diseño de bloques al azar, en lugar del diseño en cuadrado latino. Entonces la eficiencia del diseño en cuadrado latino tiene la relación entre ambos indicadores. Sin embargo, según STEEL & TORRIE(1960)[14], cuando el número de grados de libertad del error es inferior a 20 se hace pertinente introducir un factor de corrección, que lo expresamos como:

$$K = \frac{(N_1+1)(N_2+3)}{(N_2+1)(N_1+3)} \qquad \text{ec. 7.13}$$

En la cual, $\boldsymbol{N_1}$: es el grado de libertad del error del cuadrado latino, N_2: grados de libertad del error del diseño de bloques completos al azar.

Por tanto, la eficiencia relativa, tanto para filas, como columnas, de un diseño cuadrado latino respecto a un diseño de bloques se muestra la ecuación 7.14

$$ER(CL\ a\ BA) = \frac{\widehat{CME}_{BA}}{\widehat{CME}_{BA}}.(K) * 100 \qquad \text{ec. 7.14}$$

A fin de ilustrar el uso del procedimiento para el cálculo de la eficiencia de un diseño cuadrado latino respecto a un diseño de bloques. Consideremos un

[14] Principles and Procedures of statistics. New York. Mc Graw. Aill, 1960. 481 p.

experimento en cuadrado latino de 6x6 en la cual se desea probar seis variedades de uva vinífera en las condiciones de clima y ambiente de la región Tacna, Perú. Los cuadrados medios de los rendimientos de la vid se presentan a continuación:

Fuentes de variabilidad	Grado de libertad	Cuadrado medio
COLUMNAS	5	17,2444
FILAS	5	10,5111
TRATAMIENTOS	5	3,24444
RESIDUOS	20	3,24444

1º Si el experimento se hubiese conducido en bloques al azar, con las columnas como bloques, el cuadrado medio del error estimado, sería de acuerdo con la ec. 7.11

$$\widehat{CME}_{BA} = \frac{5(17.2444)+25(3.24444)}{5+5+20} = 5.5778$$

2º Si el experimento se hubiese conducido en bloques al azar con las filas como bloques. Entonces de acuerdo con la ec. 7.12, el cuadrado medio del error estimado es:

$$\widehat{CME}_{ba} = \frac{5(10.5111)+25(3.24444)}{5+5+20} = 4.45555$$

3º La eficiencia del diseño, se logra relacionando ambos indicadores, mediante:

$$ER_{CL\ a\ BA} = \frac{5.5778}{4.45555} x100 = 125.18\%$$

4º Supongamos que se introduzca el factor de corrección *K, proporcionado por la ecuación 7.13*(N_1=20, N_2=25)

$$K = \frac{(N_1+1)(N_2+3)}{(N_2+1)(N_1+3)} = \frac{(21)(28)}{(26)(23)} = 0.983$$

5º Empleando el factor *K,* la eficiencia se reduce a*:*

$$ER = 125.18(0.983) = 123.05\%$$

De los resultados, se puede observar que la eficiencia al haber empleado el diseño en cuadrado latino fue apropiado, ya que de los resultados se puede notar que hay más del 23% de eficiencia del diseño. Así mismo, de haberse empleado el diseño en bloques, se requería aumentar el número de repeticiones, en por lo menos un 25%, debido a que el número de grados de libertad del error en este diseño es mayor en esta proporción.

Ejercicios Propuestos

1. Se lleva a cabo un experimento de campo en la cual se desea probar dosis de fertilización orgánica en el cultivo del espárrago en el valle de Tacna. A fin de controlar el error en el terreno se diseña el experimento en un diseño cuadrado latino con cinco dosis de fertilización con la formación de bloques en ambas direcciones de la parcela de siembre. Los datos que se han registrado de los rendimiento, tal cual fueron distribuidos en el campo por parcela, son las que aparecen en la tabla que sigue:

	I	II	III	IV	V
I	A 60	B 48	C 53	D 40	E 45
II	B 45	C 51	D 42	E 47	A 64
III	C 50	D 41	E 48	A 66	B 45
IV	D 43	E 45	A 68	B 44	C 56
V	E 46	A 65	B 46	C 54	D 39

a) Realizar el análisis estadístico adecuado planteando las hipótesis correspondientes. Manifestar sus conclusiones, en términos del problema.
b) Realizar pruebas adecuadas para comparar las dosificaciones de fertilización y manifestar si existen diferencias estadísticas significativas entre los distintos niveles de tratamiento.

2. Un investigador desea evaluar el rendimiento de cuatro variedades de Cacao. Para tal fin decide realizar el experimento en una parcela que muestra una pendiente claramente identificada, y así mismo, se observan diferencias en la disponibilidad de nitrógeno natural del suelo a lo ancho de la parcela. A fin de controlar los efectos de la pendiente y la disponibilidad de nitrógeno, usó un diseño en cuadrado latino. Las variedades del cultivo se les ha identificado como: *A, B, C* y *D*. Los datos en Kg/ parcela son:

Disponibilidad de Nitrógeno(filas)	Pendiente(Columna)			
	1	2	3	4
1	A 785	B 730	C 700	D 595
2	B 855	C 775	D 760	A 710
3	C 885	D 950	A 795	B 780
4	D 835	A 880	B 950	C 945

Realizar la prueba de hipótesis correspondiente y el análisis estadístico adecuado empleando el paquete statgraphics y manifestar sus conclusiones.

3. Un ingeniero dedicado a la crianza de pollos para exportación de carne, realiza un experimento para probar cuatro raciones alimenticias en pollos, criados en jaulas. El experimento se condujo en un cuadrado latino 4x4, con cuatro pisos y cuatro casilleros. Los registros fueron el aumento de peso del pollo en Kg, a partir de la 2ª semana hasta la 10ª, semanas de edad. Los datos se presentan en la tabla siguiente:

Pisos	Casilleros			
	1	2	3	4
1	A 1.4	B 1.38	C 1.4	D 1.6
2	B 1.35	A 1.28	D 1.45	C 1.62
3	C 1.38	D 1.4	B 1.42	A 1.63
4	D 1.39	C 1.39	A 1.4	B 1.6

a) Elaborar la tabla del ANVA, y manifestar sus conclusiones.
b) De presentar diferencias significativas realiza la prueba de rangos múltiples de Tukey.

4. Un investigador agrónomo desea evaluar el rendimiento de cinco variedades de Tomate en un valle de la costa peruana. A fin de disminuir el riesgo en la investigación, decide emplear un diseño en Cuadrado Latino dado que existe una pendiente en el terreno de norte a sur y diferencias en la fertilidad natural del suelo de este a oeste. Los rendimientos registrados en kilogramos por hectárea de las variedades, *A,B,C,D* y *E* se presentan en la tabla siguiente:

Pendiente del suelo	Diferencias en Fertilidad natural				
	1	2	3	4	5
1	B,25	C,30	D,35	E,33	A,40
2	C,29	D,33	E,36	A,45	B,24
3	D,31	E,33	A,46	B,25	C,28
4	E,35	A,44	B,25	C,31	D,36
5	A,47	B,26	C,30	D,34	E,35

a) Realizar el análisis de varianza. ¿El rendimiento de las variedades de tomate son similares?
b) Si su respuesta es negativa realizar las pruebas de *DMS*.

5. En una región del país, si llevó a cabo un experimento en una empresa agroindustrial. Se probó seis métodos de procesamiento de aceituna negra

peruana, empleando seis máquinas diferentes y seis operarios con experiencias laborales en el rubro, distintas. Los resultados registrados, en kilogramos por hora de productividad, se aprecian en la tabla que sigue.

Operarios	Máquinas					
	1	2	3	4	5	6
1	900(A)	800(B)	700(C)	600(D)	750(E)	650(F)
2	810(B)	710(C)	610(D)	760(E)	654(F)	910(A)
3	690(C)	615(D)	755(E)	660(F)	890(A)	790(B)
4	620(D)	765(E)	650(F)	620(A)	795(B)	695(C)
5	760(E)	640(F)	900(A)	815(B)	795(C)	620(D)
6	640(F)	930(A)	795(B)	700(C)	605(D)	730(E)

a) Realizar el análisis estadístico empleando un diseño en cuadrado latino.
b) Manifestar si existen diferencias significativas entre los métodos de procesamiento de aceituna negra.
c) Si observa diferencias estadísticas, realizar la prueba de rangos múltiples de Duncan.

6. Se desea estudiar el efecto de cinco fertilizantes en cultivos comerciales del tomate. Antes de trazar las parcelas se observa que hay diferencia de humedad en el suelo en una dirección y que la gradiente de fertilidad natural lo hace en forma perpendicular a humedad. A fin de eliminar las influencias del entorno se emplea un diseño en cuadrado latino. Los datos de rendimiento del tomate en toneladas por hectárea se presentan en la tabla siguiente:

Hileras	Columnas				
	1	2	3	4	5
I	A,25	B, 31	C, 21	D, 36	E, 26
II	B,30	C, 19	D, 33	E, 26	A, 24
III	C, 20	D, 35	E, 22	A, 27	B, 32
IV	D, 34	E, 26	A, 25	B, 29	C, 22
V	E, 25	A, 27	B, 32	C, 21	D, 35

a)Realizar el análisis de varianza
b) Manifestar sus conclusiones
c) Si encuentra diferencias estadísticas, realizar la prueba de rangos múltiples de Duncan.

7. Realizar el análisis estadístico para el problema 6, añadiendo 5 a cada uno de los datos de la hilera 4 y manifestar sus conclusiones.

8. Calcular la eficiencia del diseño en cuadrado latino, empleando los datos del problema 5, respecto a un diseño de bloques completos al azar.

9. Empleando los datos del problema 6, calcule la eficiencia relativa del diseño en cuadrado latino, respecto a un diseño de bloques completos al azar. Manifieste sus comentarios

10. Realizar el análisis estadístico empleando los datos del problema 5, añadiendo 50 a cada uno de los datos de la columna 3.

11. Se propone al lector plantear un problema en el contexto de su carrera y realizar al final el cálculo de la eficiencia del diseño en cuadrado latino.

12. Se llevó a cabo un experimento de campo en la cual se desea probar seis variedades de frijoles negros, conducidos en un diseño en cuadrado latino con filas y columnas. Los datos en Tn/ha, se muestran en la tabla que sigue:

	Columna					
Fila	1	2	3	4	5	6
1	$18 = A$	$14 = B$	$19 = C$	$21 = D$	$17 = E$	$12 = F$
2	$15 = B$	$15 = C$	$22 = D$	$18 = E$	$18 = F$	$13 = A$
3	$13 = C$	$17 = D$	$24 = E$	$14 = F$	$21 = A$	$10 = B$
4	$12 = D$	$13 = E$	$26 = F$	$13 = A$	$20 = B$	$11 = C$
5	$19 = E$	$16 = F$	$20 = A$	$20 = B$	$19 = C$	$12 = D$
6	$21 = F$	$22 = A$	$14 = B$	$15 = C$	$24 = D$	$14 = E$

a) Realizar el análisis estadístico y probar las hipótesis de igualdad de medias, para un nivel de significación del 0.05.
b) Usar el método de Tukey para probar la significancia de las medias de los tratamientos
c) Calcular la eficiencia del diseño cuadrado latino respecto a un diseño de bloques completos al azar.

…

CAPÍTULO VIII

EXPERIMENTOS FACTORIALES

En el desarrollo de experimentos, existen aquellos que tienen planteamientos simples, la cual comprende el estudio de un solo factor o característica de interés para el investigador. En el capítulo IV se estudió el diseño completamente al azar o de una dirección y en el capítulo V, se introdujo el estudio de un diseño de bloques completos al azar y el diseño en cuadrado latino en el capítulo VII. Todos los diseños mencionados se clasifican como simples. Sin embargo, el aporte de los diseños experimentales, permite estudiar más de un factor o característica de manera simultánea. En este capítulo, extenderemos nuestro estudio al análisis de un modelo que incluye varios factores de interés. A este procedimiento se le denomina experimentos factoriales, puesto que permite estudiar simultáneamente, dos o más factores. Los tratamientos o niveles de los factores se forman combinando los distintos niveles de los factores que intervienen.
Los experimentos factoriales se pueden conducir adecuadamente dentro de cada uno de los diseños experimentales estudiados en los capítulos previos, que son los más usuales: *DCA, DBCA, DCL*, Diseños en Parcelas Divididas.
Por ejemplo, consideremos un experimento que consiste en tres niveles de un factor A y dos niveles de un factor *B*. Los tratamientos son todas las combinaciones de *A* y todos de *B*. Si el factor *A* es, tres variedades de Ají páprika y *B*, dos niveles de fertilización con Nitrógeno, entonces las combinaciones de tratamientos son: A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2, A_3B_1, A_3B_2, que puede ilustrarse como en la fig. 8.1.

Fig. 8.1

Factor A	A_1		A_2		A_3	
Factor B	B_1	B_2	B_1	B_2	B_1	B_2
Combinaciones de Tratamientos	A_1B_1	A_1B_2	A_2B_1	A_2B_2	A_3B_1	A_3B_2

8.1 VENTAJAS DE LOS FACTORIALES

Como es natural, vamos a resaltar los fundamentos de los experimentos factoriales, señalando sus principales ventajas.

1° Se dispone de mayor precisión adicional en uno de los factores, puesto que el resto es útil como replicaciones escondidas.
2° Permite detectar la presencia de efectos importantes, como la interacción de los factores.
3° Un factor puede usarse para ampliar el alcance de un experimento para la introducción de otro factor relevante, lo que es imposible en un diseño simple.
4° Permite estudiar por separado el efecto principal, los efectos simples de los factores, y la interacción.

5° Permite reducir la varianza del error experimental, debido a que los grados de libertad del error es alto, contribuyendo a una mayor precisión del experimento.

6° Los tratamientos en un experimento factorial puede trasladarse a una superficie de respuesta, en la cual puede observarse relaciones bivariables cuantitativas de respuesta. Esto permite estudiar la interacción de los factores trazando curvas de rendimiento constantes.

8.2 DESVENTAJAS DE LOS FACTORIALES

Puntualicemos algunas de ellas:

1° El análisis estadístico se torna más complicado debido a que, para cada factor es necesario realizar el planteamiento de hipótesis y realizar conclusiones.

2° Cuando se considera muchos factores con varios niveles se forman un grupo grande de combinaciones de tratamientos haciendo engorroso el análisis estadístico y costoso el experimento.

8.3 CONCEPTOS DE USO FRECUENTE EN EXPERIMENTOS FACTORIALES

Es oportuno reafirmar que los factoriales no son diseños experimentales, constituyen un conjunto de arreglos o combinaciones de niveles de tratamientos, que está en función de los niveles de los factores en competencia. A continuación, vamos a tratar de abordar puntualmente algunos términos que se emplean en los factoriales o están relacionados con los mismos.

*Facto*r, es un conjunto de niveles de un tratamiento o característica bajo estudio. Es una característica controlada y puede variar de acuerdo al interés del investigador. Ejemplo, variedades de un producto agrícola orgánico, niveles de fertilización, distanciamiento de siembra en espárragos verdes, tipo de saborizantes en yogurt dietético, tipo de leche para un producto lácteo, etc. En términos de variables, constituye la variable independiente con la misma que se busca ejercer algún efecto en el resultado.

Factores cuantitativos, son aquellos cuyos niveles de tratamientos pueden ser arreglados en una escala numérica o en orden de magnitud.
Por ejemplo: dosis de fertilización nitrogenada en un cultivo de Cebolla; estos pueden ser: 0 – 20 – 40 – 60 kg por hectárea. Temperatura aplicada a un cultivo de invernadero: 20 – 25 – 30 – 35 grados Celsius. Temperatura a la que se somete el escaldado de un producto para su envasado, 70,75,80,85 grados Celsius.

Factores cualitativos, son aquellos cuyos niveles de tratamientos son arreglados mediante atributos del factor. Por ejemplo, variedades de tomate para exportación, variedades de cacao orgánico, método de enseñanza del idioma inglés, métodos de enseñanza de la matemática, etc.

Niveles del factor, son todos aquellos tratamientos asociados a un factor bajo estudio. Un factor puede tener varios niveles o tratamientos. Si la materia a estudiar es el rendimiento de seis variedades de café orgánico del Perú, los niveles del factor variedades de café orgánico son seis. Si la investigación consiste en medir el rendimiento en la signatura de matemática superior a estudiantes de economía, los niveles del factor son, los métodos de enseñanza de la matemática.
Respuesta, es el resultado de la investigación propiciado por los niveles de los factores. Un factor puede ser motivo de evaluaciones varias, bajo diferentes indicadores. Por ejemplo, si estudiamos las variedades de café, un indicador es el rendimiento por planta, puede medirse también el número de frutos por gajos o racimos, el diámetro y el peso del fruto. En el cultivo del olivo, se mide el rendimiento por hectárea, el rendimiento por árbol, número de frutos por bolsas de kilogramo. En una investigación sensorial de un producto, la respuesta es la calificación de los jueces expertos en el tema, bajo una determinada escala de calificación.
Efecto de los factores, son los cambios observados en la respuesta del experimento, por los cambios efectuados en los niveles de los factores. Cuando se trata de un factorial de dos niveles, los efectos se pueden medir mediante la diferencia de los promedios de respuestas por efecto del primer nivel y el segundo.
Así mismo, puede observarse en un experimento factorial, tres tipos de efectos: efecto principal, efecto de interacción, y el efecto simple

8.4 EXPERIMENTOS CON DOS FACTORES SIN RÉPLICAS

Este experimento es similar a un diseño de bloques al azar, con la diferencia que en el análisis estadístico no se considera como fuente de variabilidad los bloques, sino factor A y factor *B* como factores significativos y la interpretación se hace para cada factor. En este modelo, los factores *A y B* son dos variables independientes y son evaluados en forma simultánea. Por tanto, mientras que en un diseño de bloques, los niveles del factor *A* son tratamientos simples, en este modelo, son combinaciones de tratamientos, A_iB_j, sin repeticiones. A continuación ilustramos mediante la tabla 8.1 la presentación de un experimento factorial con dos variables sin repeticiones.

Tabla 8.1 Experimento con dos factores A y B

Factor B	Factor A				Total Factor B
	A_1	A_2	…	A_a	
B_1	Y_{11}	Y_{21}	…	Y_{a1}	$Y_{.1}$
B_2	Y_{12}	Y_{22}	…	Y_{a2}	$Y_{.2}$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
B_b	Y_{1b}	Y_{2b}	…	Y_{ab}	$Y_{.b}$
Total A	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$	…	$Y_{a.}$	$Y_{..}$

En la tabla 8.1, se presenta el esquema del modelo factorial con dos factores sin ráplicas, que es aparentemente muy similar a bloques aleatorizados. Sin embargo, cuando se procede a realizar el análisis debe considerarse dos interpretaciones diferentes. La primera, considerando los niveles del factor A como una asignación aleatoria a los niveles del factor *B*. La segunda, considerando a cada factor como variables completamente aleatorias e independientes, y las Y_{ij} son las respuestas a los tratamientos combinados de tamaño 1 de los A_iB_j.

Ejemplo 8.1 Un ingeniero agroindustrial está interesado en determinar los efectos de cuatro niveles de temperatura en almacenamiento de mangos (factor *A*) y 5 lotes iguales provenientes de cinco almacenes diferentes (factor *B*). La respuesta en este estudio es el número de frutas de mango que presentan algún deterioro en su apariencia.
La temperatura que se aplica a los lotes es: 10°, 15°, 20° y 25°. Los resultados, en la cual se registran el número de mangos deteriorados, son:

Tabla 8.2 Temperatura de almacenamiento y almacén de procedencia de mangos deteriorados

	Temperatura				Total almacén	Media almacén
Almacén	A_1=10°	A_2=15°	A_3=20°	A_4=25°		
B_1	9	13	11	16	49	12.25
B_2	12	15	10	17	54	13.50
B_3	3	12	15	16	51	12.75
B_4	11	18	16	20	65	16.25
B_5	10	9	13	13	45	11.25
Total Temp.	50	67	65	82	264	
Med Temper.	10	13.4	13	16.4		13.20

En este ejemplo, tenemos dos variables

A: Temperatura de almacenamiento $a = 4$
B: Almacén de procedencia $b = 5$

Procedemos a realizar todos los cálculos pertinentes y necesarios
1° El Término de corrección

$$TC = \frac{Gran\ total}{ab} = \frac{264^2}{20} = 3484.8$$

2° La suma de cuadrado del total

$$SCT = \sum Y_{ij}^2 - TC = 9^2 + 12^2 + 8^2 + \cdots + 16^2 + 20^2 + 13^2 - TC$$
$$= 3694 - 3484.8 = 209.2$$

3° La suma de cuadrado de Factor *A*

$$SCA = \frac{\sum Y_{i.}^2}{b} - TC = \frac{50^2+67^2+65^2+82^2}{5} - TC = \frac{17938}{5} - 3484.8$$
$$= 3587.6 - 3484.8 = 102.8$$

4° La suma de cuadrado de Factor *B*

$$SCB = \frac{\sum Y_{.j.}^2}{a} - TC = \frac{49^2+54^2+51^2+65^2+45^2}{4} - TC = \frac{14168}{4} - 3484.8$$
$$= 3542 - 3484.8 = 57.2$$

5°La suma de cuadrado del error

$$SCE = SCT - SCA - SCB = 209.2 - 102.8 - 57.2 = 49.2$$

Tabla 8.3 análisis de varianza

Fuente de variación	*GL*	*SC*	*CM*	*F*
Factor A	3	102.8	34.267	8.357
Factor B	4	57.2	14.3	3.487
Error	12	49.2	4.1.	
Total	19	209.2		

Para el análisis del ejemplo 8.1 debemos investigar las posibles diferencias entre las temperaturas de almacenamiento (factor A) y los almacenes de donde proceden los mangos (Factor B). Como puede apreciarse, las filas que se observan con el anterior modelo, son bloques que no tienen mayor ponderación en el efecto de las temperaturas en los productos. En este modelo, las observaciones deben ser interpretadas como una combinación de la temperatura y el almacén de donde proceden los productos. Así por ejemplo, la primera observación de la segunda columna es $Y_{21} = 13$ se debe interpretar como un nivel de combinación del segundo nivel de temperatura y primer almacén de procedencia. Así mismo, Y_{21} fue extraída de una población de combinaciones A_2B_1, cuyo promedio de productos deteriorados es $\mu_{21} = 13.4$.
El cuadro de análisis de varianza y los procedimientos de pruebas de hipótesis son muy similares, con la diferencia que, en este modelo, se debe plantear la significancia para ambos factores, $\alpha_i = 0$ y $\beta_j = 0$, como se observa a continuación.

Prueba para el factor A

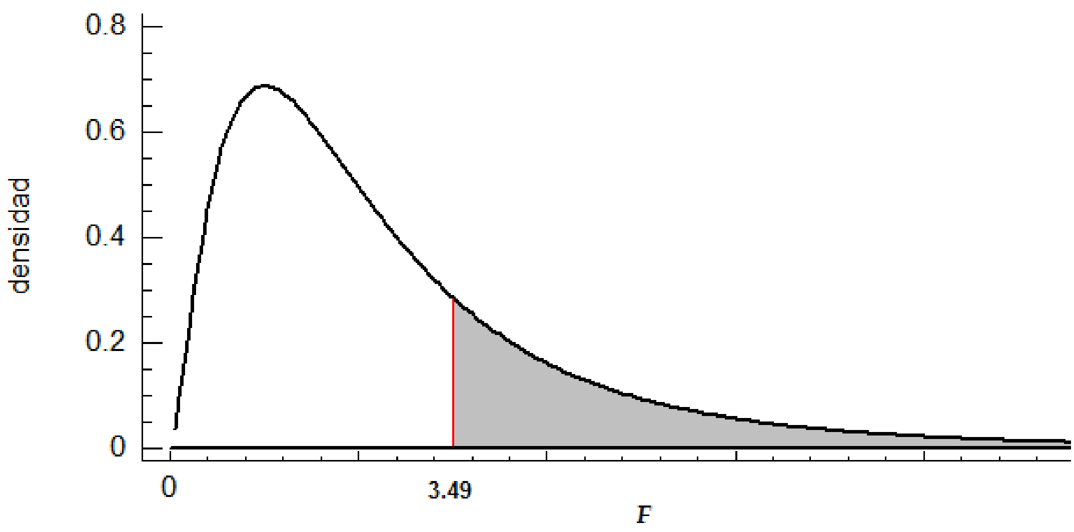
1° Hipótesis

$H_0: \alpha_i = 0 \quad \forall \ i = 1,2,3,4$
$H_1: \alpha_i \neq 0$ para algún valor de i

2° Nivel de significación: $\alpha = 0.05$
3° El estadístico de prueba a emplear es: $F_c = \frac{CMA}{CME} = \frac{34.267}{4.1} = 8.357$

4° La regla de decisión se plantea como: $si\ F_c > F_{(3,12),(0.05)}$ se rechaza *H*$_0$. De la tabla *D* del anexo, $F_{(3,12),(0.05)} = 3.49$, que se observa en la figura 8.2, siguiente:

Fig. 8.2 Prueba de F para factor A



Puesto que $F_c = 8.357$ es mayor que $F_{(3,12),(0.05)} = 3.49$ se rechaza la hipótesis nula

Prueba para factor B

1° Hipótesis

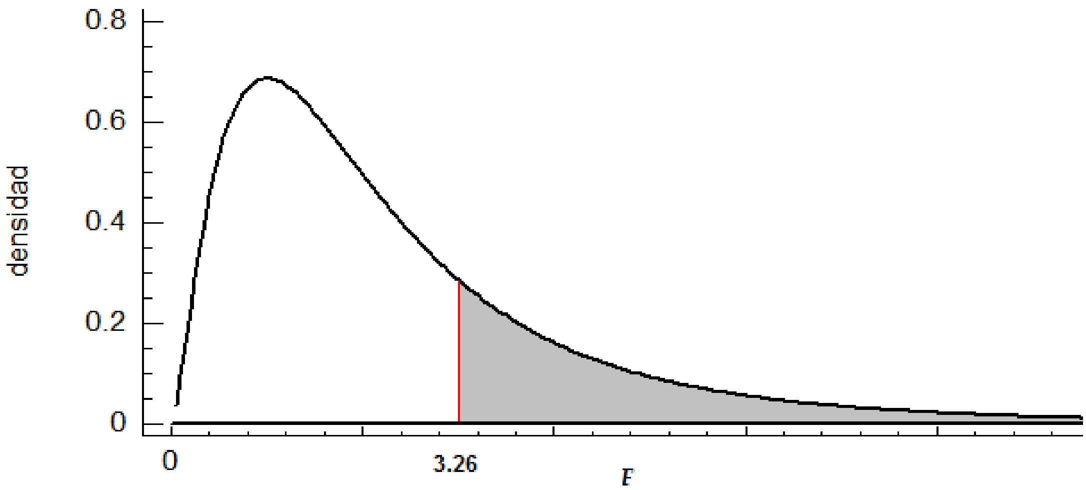
$$H_0: \beta_j = 0, \quad para\ todo\ j = 1,2,3,4,5$$
$$H_1: \beta_j \neq 0, \quad para\ algún\ valor\ de\ j$$

2° Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

3° El estadístico de prueba a emplear es: $F_c = \frac{CMB}{CME} = \frac{14.3}{4.1} = 3.487$

4° La regla de decisión se plantea como: si $F_c > F_{(4,12),(0.05)}$, se rechazará la H_0. De la tabla *D* del anexo se encuentra que $F_{(4,12),(0.05)} = 3.26$, la fig. 8.3 muestra la zona crítica para rechazar la hipótesis nula si el valor muestral supera la frontera crítica. Puesto que $F_c = 3.487$, es mayor que $F_{(4,12),(0.05)} = 3.26$, se rechaza la hipótesis nula, significando que el efecto de las medias del factor *B*, son significativamente diferentes entre sí, tal como se observa en la siguiente ilustración

Fig. 8.3 Prueba de F para factor B



De acuerdo a los resultados observados, ambas pruebas son significativas en $\alpha = 0.05$. Significando que la prueba para el factor A, temperatura de almacenamiento muestran diferencias significativas en eficiencia en la conservación del producto, así como los almacenes de donde proceden los productos, también muestran diferencias marcadas.

8.5 SOLUCIÓN MEDIANTE STATGRAPHICS

Para realizar el análisis empleando el paquete statgraphics, se ingresan los datos como es habitual en el editor de datos, creando las columnas que sean necesarias para resolver el problema. Para el caso de experimentos factoriales, debe considerarse, la columna de Factor A, Factor B y la columna de resultados, luego se procede siguiendo la siguiente ruta: $\boldsymbol{c}omparación \rightarrow Análisis\ de\ varianza \rightarrow Anova\ factorial$

Fig. 8.4 solución mediante statgraphics

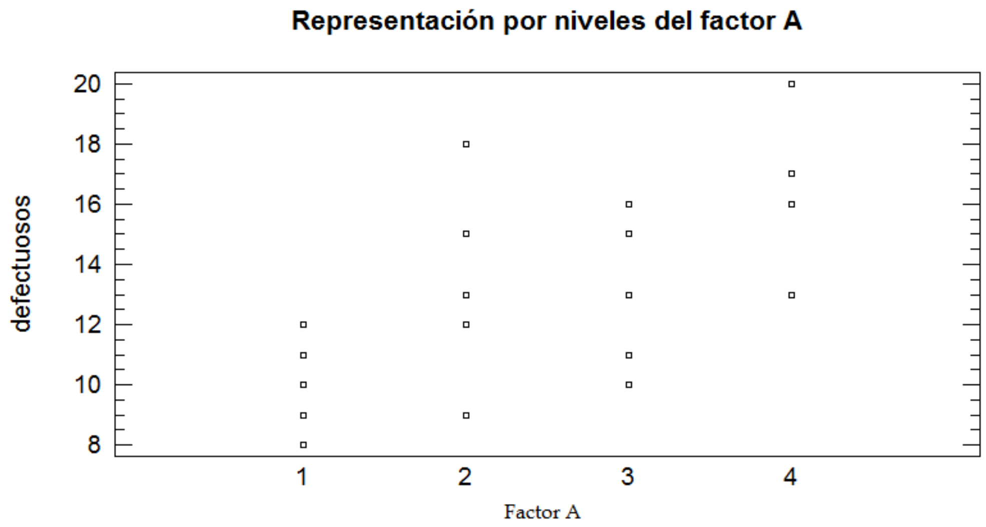
Análisis de la Varianza para Datos - Sumas de Cuadrados de Tipo III

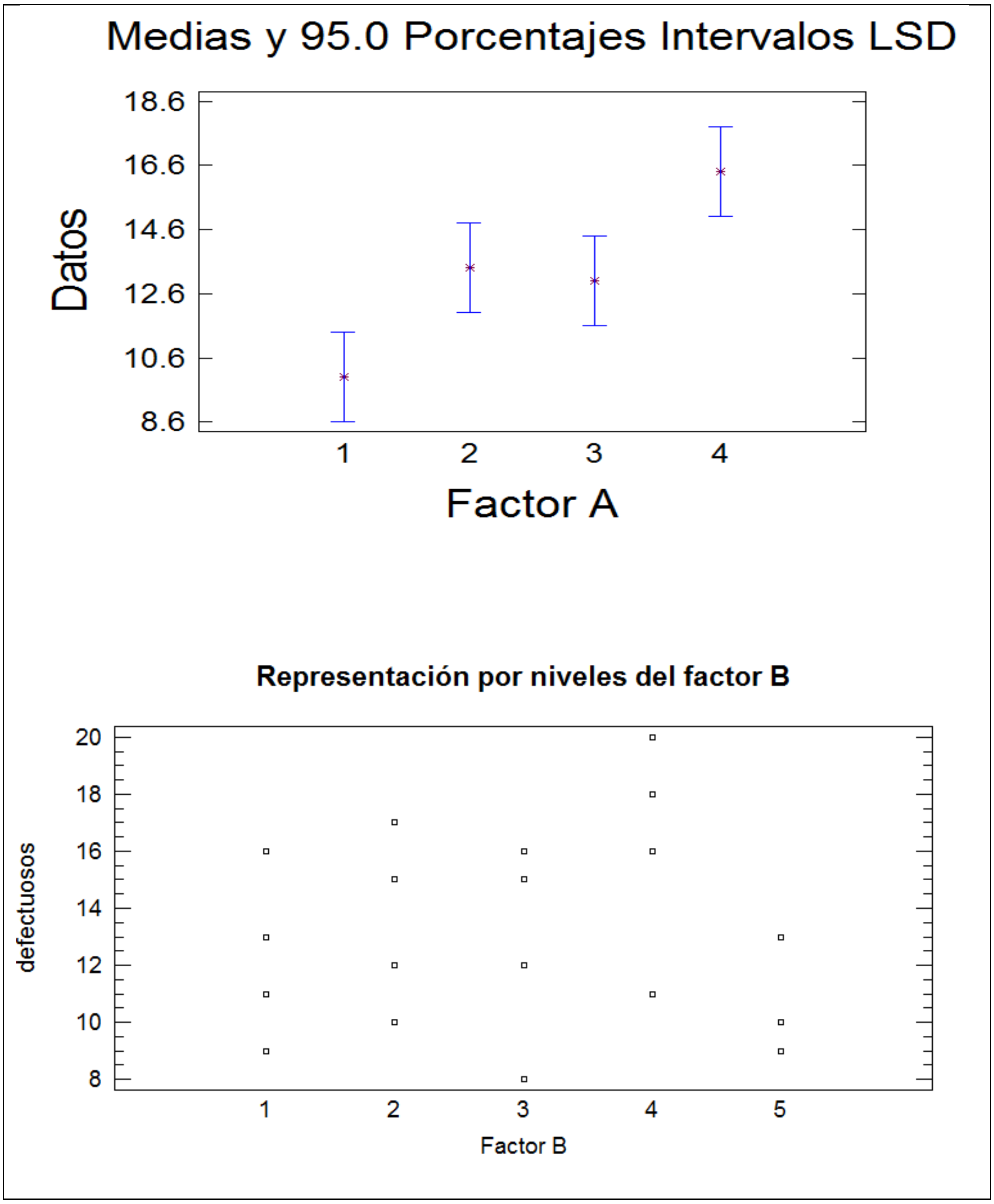
Fuente	Suma de Cuadrados	GL	Cuadrado Medio	Cociente-F	P-Valor
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Factor A	102.8	3	34.2667	8.36	0.0029
B:Factor B	57.2	4	14.3	3.49	0.0413
RESIDUOS	49.2	12	4.1		
TOTAL	209.2	19			

Los cocientes *F* están basados en el error cuadrático medio residual.

El StatAdvisor

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de Datos en las contribuciones debidas a varios factores. Puesto que se ha elegido la suma de cuadrados Tipo III (valor por defecto), se ha medido la contribución de cada factor eliminando los efectos del resto de los factores. Los P-valores comprueban la importancia estadística de cada uno de los factores. Dado que 2 p-valores son inferiores a 0.05, estos factores tienen efecto estadísticamente significativo en Datos para un 95.0% de confianza





8.6 PRUEBA DE DSM

a) **Para temperatura de almacenamiento: factor A**

$$DSM = t.\sqrt{\frac{2(CME)}{b}} = (1.7823)\sqrt{\frac{2(4.1)}{5}} = 2.2824$$

Para realizar la prueba, empleamos la DSM, descrito en el capítulo VI, el mismo que resulta igual a 2.2824. Las medias del factor *A*, Temperatura de almacenamiento, que aparecen en la matriz, tabla 8.2, son:

	10	13.4	13.0	16.4
10.0				
13.4	3.4*	-	-	-
13.0	3.0*	0.4	-	-
16.4	6.4*	3.0*	3.4*	-

Se observa que de las seis comparaciones efectuadas, cinco son significativamente diferentes al nivel de significación del 0.05, de los cuales el tratamiento A_1, temperatura de almacenamiento de 10°C, es el más eficiente en la conservación de los mangos.

b) Prueba *DSM* para almacén de procedencia,

Para esta ocasión, las medias del factor *B*, cuyas comparaciones brindan los siguientes resultados, son:

	12.25	13.50	12.75	16.25	11.25
12.25					
13.50	1.25	-	-	-	
12.75	0.5	0.75	-	-	
16.25	4.0*	2.75*	3.5*	-	
11.25	1.0	2.25	1.5	5.0*	

Según observamos en la tabla de resultados anterior, las medias de los tratamientos almacén de procedencia, cuatro de ellos son significativamente diferentes al nivel de 0.05, de los cuales, el tratamiento B_5, es a la luz de las comparaciones efectuadas el que presenta mejor performance, es decir, se observó en promedio un menor número de frutos deteriorados lo que ayudaría al momento de escoger un almacén para el cuidado del producto.

8.7 EXPERIMENTOS CON DOS FACTORES CON RÉPLICAS

Como el caso anterior, en este modelo, tratamos con dos variables de tratamiento independiente. Sin embargo, en esta ocasión tenemos consideraciones adicionales. Primero, a diferencia del modelo anterior, para cada combinación de tratamiento se tiene más de una observación, es decir, cada celda de datos contiene $n_{ij} \geq 2$ observaciones. Segundo, se parte de la suposición que los factores no son del todo

independientes, puesto que se espera que unos actúen sobre los otros. Tercero, se espera un efecto de interacción atribuible a ambos factores, no a uno u otro en forma independiente.
La interacción en los experimentos es importante porque, si existe, estos no pueden ser tratados en forma separada. Por ejemplo, si en un plan de negocios de una granja de vacunos, se considera suplementar a los animales de engorde con una *dieta balanceada* y simultáneamente se desea probar un *antibiótico* para prevenir enfermedades infecciosas, entonces al medir los efectos de los factores se debe tener en cuenta el comportamiento del animal por niveles de la *dieta* y los niveles del *antibiótico*. En este caso, la interacción estará presente, puesto que el efecto de un factor dependerá del nivel del otro factor.
La observación de interacción es importante porque permite realizar simultáneamente dos experimentos, que de hacerlo en forma separada e independiente, resultaría oneroso. Así mismo, las inferencias que se realizan de estos experimentos gravitan más en las conclusiones y pueden ser de una aplicación práctica inmediata.
El modelo estadístico de clasificación con dos factores con réplicas, es una extensión del modelo de bloques aleatorizados. Sin embargo, incluimos el efecto de interacción en el modelo y puede expresarse como:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \qquad \text{ec. 8.1}$$

Donde las ϵ_{ijk} son independientes y están distribuidas como $\sim N(0, \sigma^2)$ y además suponemos que la suma de los efectos de los α_i, β_j e Interaccion$(\alpha\beta)$, es cero.

$$\sum \alpha_i = \sum \beta_j = \sum\sum \alpha_i\beta_j = 0$$

Para desarrollar el procedimiento de la prueba de este modelo, a continuación definimos términos que usualmente se usa en experimentos factoriales con más de una observación por celda de datos.

$N =$ Número de observaciones totales de experimento
$n =$ Número de observaciones por celda
$a =$ Número de niveles del factor A
$b =$ Número de niveles del factor B
$G =$ Gran total de hileras y columnas
$Y_{ijk} =$ Valor de la k-ésima observación correspondiente al nivel i de A y nivel j de B
$Y_{ij} =$ Valores de la celda correspondiente a los niveles i de A y j de B
$Y_{i...} =$ Total del nivel de i de A
$Y_{.j.} =$ Total del nivel j de B

En la tabla 8.4, se realiza la presentación de los datos de un modelo factorial con dos factores independientes distribuidos en forma completamente aleatoria con más de una réplica por celda. La comprensión y manejo de esta tabla ayudará al investigador a visualizar las fuentes de variabilidad en que se divide la suma total de cuadrados y los cálculos correspondientes para cada componente del modelo. A

fin de facilitar la comprensión de este procedimiento, asumiremos que cada dato contiene el mismo número de observaciones, n, por celda.
Para definir el modelo presentado, según ec. 8.1, de un experimento factorial, como la de la tabla 8.4 con dos factores (variables) y con réplicas mayores a uno por celda, se procede a descomponer la variabilidad total (*SCT*), en la suma de cuadrados debido al Factor A, *SCA*, en la suma de cuadrados debido al factor B, *SCB*, suma de cuadrados debido a la interacción de *A y B, SC (AB)*, y la suma de cuadrado debidos al error aleatorio inherente al experimento, *SCE*. Esta descomposición, se presenta mediante la siguiente identidad:

$$\left(Y_{ijk}-\bar{Y}_{...}\right)=(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...})+\left(\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{...}\right)+\left(\bar{Y}_{ij.}-\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{i..}+\bar{Y}_{...}\right)+(\bar{Y}_{ijk}-\bar{Y}_{ij.}) \quad \text{ec. 8.2}$$

Así mismo, si elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación 8.2, queda demostrado que la suma total de cuadrados se descompone en cuatro términos a saber:

Tabla 8.4 Modelo de un experimento factorial con *dos* factores y *n* número de réplicas

Factor B	Factor A				Total de Factor B
	A_1	A_2	…	A_a	
B_1	Y_{111} Y_{112} . . . Y_{11n}	Y_{211} Y_{212} . . . Y_{21n}	… … …	Y_{a11} Y_{a12} . . . Y_{a1n}	
Subtotal	$\mathbf{Y_{11.}}$	$\mathbf{Y_{21.}}$	**…**	$\mathbf{Y_{a1.}}$	$Y_{.1.}$
Media de celdas	$\bar{Y}_{11.}$	$\bar{Y}_{21.}$		$\bar{Y}_{a1.}$	$\bar{Y}_{.1.}$
B_2	Y_{121} Y_{122} . . . Y_{12n}	Y_{221} Y_{222} . . . Y_{22n}	… …	Y_{a21} Y_{a22} . . . Y_{a2n}	
Subtotal	$\mathbf{Y_{12.}}$	$\mathbf{Y_{22.}}$	**…**	$\mathbf{Y_{a2.}}$	$Y_{.2.}$
Media de celda	$\bar{Y}_{12.}$	$\bar{Y}_{22.}$		$\bar{Y}_{a2.}$	$\bar{Y}_{.2.}$
B_b	Y_{1b1} Y_{1b2} . . . Y_{1bn}	Y_{2b1} Y_{2b2} . . . Y_{2bn}	… …	Y_{ab1} Y_{ab2} . . . Y_{abn}	
Subtotal	$\mathbf{Y_{1b.}}$	$\mathbf{Y_{2b.}}$	**…**	$\mathbf{Y_{ab.}}$	$Y_{.b.}$
Media de celda	$\bar{Y}_{1b.}$	$\bar{Y}_{2b.}$		$\bar{Y}_{ab.}$	$\bar{Y}_{.b.}$
Total de	$Y_{1..}$	$Y_{2..}$	…	$Y_{a..}$	$Y_{...}$

Factor A					
Media Factor A	$\bar{Y}_{1\ldots}$	$\bar{Y}_{2..}$	$\cdots$	$\bar{Y}_{a..}$	$\bar{Y}_{\ldots}$

Suma de cuadrado del total, que viene a representar la variación registrada entre todos los valores observados en torno a la media general y puede calcularse a través de:
Suma de cuadrado total= $SCT = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{\ldots})^2$

Suma de cuadrados debido al factor A, viene a representar la diferencia entre los niveles del factor A y la media general, su cálculo puede realizarse mediante:

Suma de cuadrado del factor A= $SCA = an\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{\ldots})^2$

Suma de cuadrado debido al factor B, representa la diferencia entre los niveles del factor B y la media general, su cálculo puede realizarse mediante:

Suma de cuadrado del factor B= $SCB = bn\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{\ldots})^2$

Suma de cuadrado de la interacción de A ***y*** B, viene a representar el efecto combinado tanto del factor A como del factor B sobre la variable dependiente, su cálculo puede realizarse mediante:

Suma de cuadrado de Interacción= $SC(AB) = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{\ldots})^2$

Suma de cuadrado del error aleatorio, viene a representar las distintas diferencias entre las observaciones de cada una de las celdas y las correspondientes medias de celdas, su cálculo puede realizarse mediante:

Suma de cuadrado del error= $SCE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$

Lo que se resume como:

$$SCT = SCA + SCB + SC(AB) + SCE$$

Para la construcción del análisis de varianza, es menester conocer con precisión los valores de los grados de libertad de cada una de las componentes, puesto que los niveles del factor se inician en *1* terminando en a, entonces los grados de libertad para este componente es $(a-1)$. De igual modo, los grados de libertad para el factor B, se calcula mediante $(b-1)$. Así mismo, en las celdas, se tiene más de un dato por lo que habrán $ab(n-1)$ grados de libertad para el error aleatorio. Ahora bien, para calcular los grados de libertad de la interacción, se puede realizar mediante el producto de $(a-1)(b-1)$.

Sin embargo, las fórmulas presentadas, más sencillas y fácil de manejar para las sumas de cuadrados de todas las componentes, presentamos a continuación:

En primer término, se calcula el término de corrección, mediante:

Término de corrección=TC$= \frac{(Gran\ total)^2}{abn} = \frac{(\sum\sum\sum Y_{ijk})^2}{abn}$ ec. 8.3

$Suma\ de\ cuadrado\ de\ totales = SCT = \sum\sum\sum Y_{ijk}^2 - TC$ ec. 8.4

$Suma\ de\ cuadrado\ del\ factor\ A = SCA = \frac{\sum\sum Y_{i..}^2}{bn} - TC$ ec. 8.5

$Suma\ de\ cuadrado\ del\ Factor\ B = SCB = \frac{\sum\sum Y_{.j.}^2}{an} - TC$ ec. 8.6

Suma de cuadrado de la interacción AB $= SC(AB) = \frac{\sum\sum Y_{ij.}^2}{n} - \frac{\sum Y_{i..}^2}{bn} - \frac{\sum Y_{.j.}^2}{an} + TC$ ec.8.7

$Suma\ de\ cuadrado\ del\ error = SCE = \sum\sum\sum Y_{ijk}^2 - \frac{\sum\sum Y_{ij.}^2}{n}$ ec. 8.8

Los cuadrados medios son estimadores de la varianza poblacional σ^2 cuando las hipótesis nulas son ciertas, y pueden calcularse mediante

$CMA = \frac{SCA}{a-1}$ ec. 8.9

$CMB = \frac{SCB}{b-1}$ ec. 8.10

$CM(AB) = \frac{SC(AB)}{(a-1)(b-1)}$ ecc. 8.11

$CME = \frac{SCE}{ab(n-1)}$ ec. 8.12

La tabla del análisis de varianza para el presente modelo se da en la tabla 8.5, en la que se aprecia un componente debido a la actuación conjunta de los factores A y B, es decir, la interacción de los factores principales. Esto es relevante explorar antes de realizar las pruebas de hipótesis para los tres componentes, como se observa a continuación:

Tabla 8.5 Análisis de varianza para un modelo factorial de dos factores con réplicas

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio
Entre niveles del factor A	$(a-1)$	$\frac{\sum Y_{i..}^2}{bn} - TC$	$\frac{SCA}{a-1}$
Entre niveles del factor B	$(b-1)$	$\frac{\sum Y_{.j.}^2}{an} - TC$	$\frac{SCB}{b-1}$
Interacción de (AB)	$(a-1)\,(b-1)$	$\frac{\sum\sum Y_{ij.}^2}{n} - (\frac{\sum Y_{i..}^2}{bn} + \frac{\sum Y_{.j.}^2}{an} - TC)$	$\frac{SC(AB)}{(a-1)(b-1)}$
Error aleatorio	$ab(n-1)$	$\sum\sum\sum Y_{ijk}^2 - \frac{\sum\sum Y_{ij.}^2}{n}$	$\frac{SCE}{ab(n-1)}$
Total	$abn-1$	$\sum\sum\sum Y_{ijk}^2 - TC$	

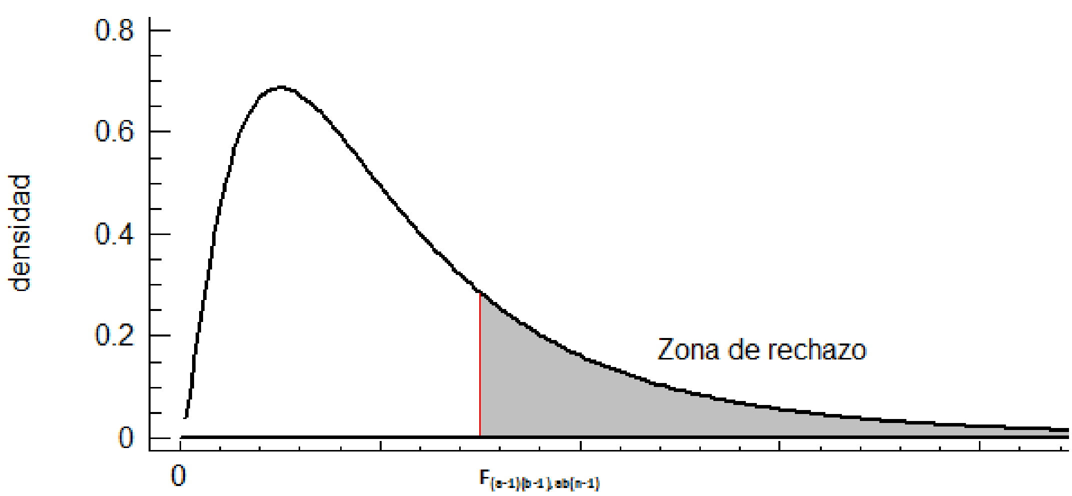
Para culminar con el análisis e ir a las aplicaciones del modelo, se debe considerar el planteamiento de tres hipótesis, para la variable A, para B y para la interacción (AB), como se ve a continuación

1º Prueba del efecto debido a la interacción de A y B

Hipótesis nula: $H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \; \forall \; i = 1,2, \dots a \quad j = 1,2, \dots b$

Hipótesis alternativa: $H_a: (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

Fig. 8.5 Prueba de F para interacción (AB)



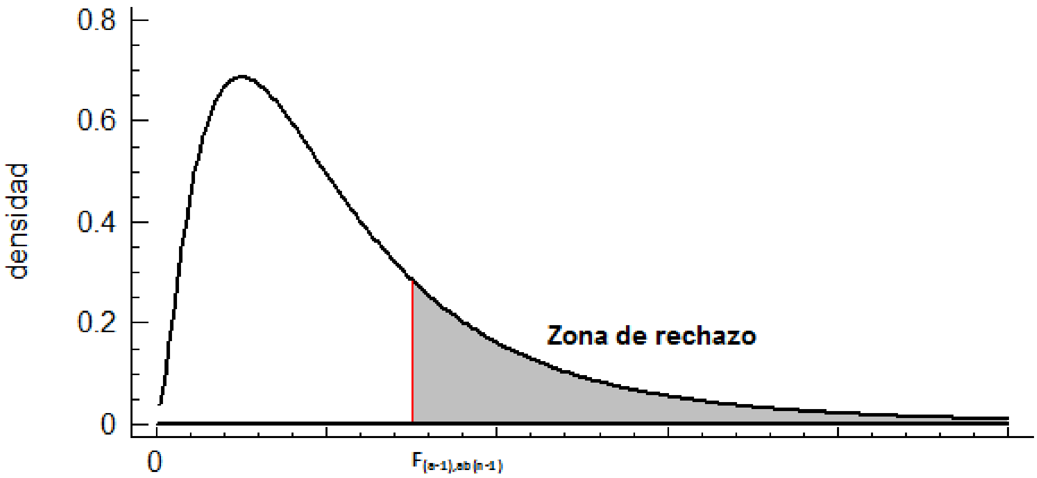
2º Prueba del efecto del factor A

Hipótesis nula: $H_0: \alpha_i = 0 \; \forall \; i = 1,2, \ldots a$

Hipótesis alternativa: $H_a: \alpha_i \neq 0$

La regla de decisión para esta prueba está dada por la zona superior de la distribución F, zona de rechazo, similar a la prueba de interacción, como se observa en la fig. 8.6.

Fig. 8.6 Prueba de F para factor A



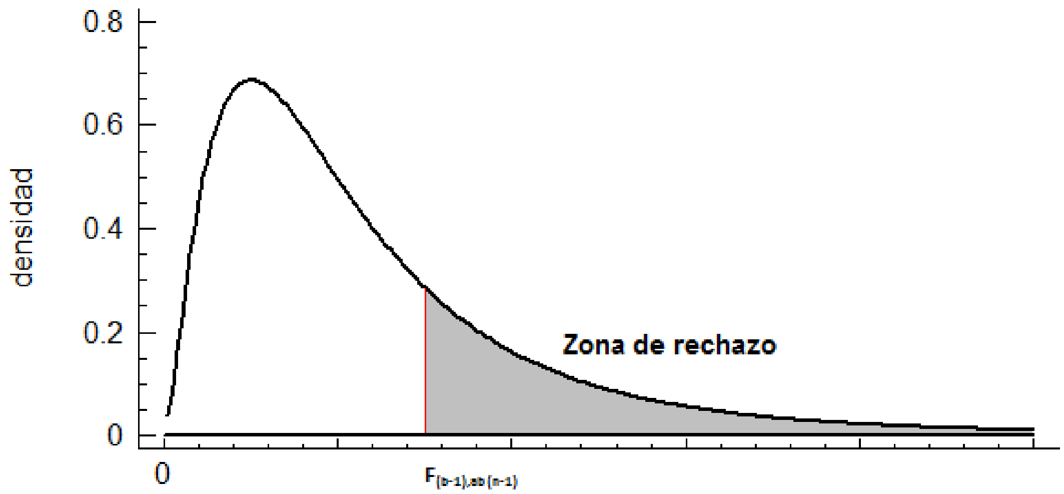
3º Prueba del efecto del factor B

Hipótesis nula: $H_0: \beta_j = 0 \; \forall \; j = 1,2, \ldots b$

Hipótesis alternativa: $H_a: \beta_j \neq 0$

La regla de decisión con la zona de rechazo se muestra en la fig. 8.5

Fig. 8.7 Prueba para factor B



Es oportuno hacer notar en el investigador que, en el planteamiento de las hipótesis resulta conveniente iniciar en primer término con la prueba para la interacción. Si esta prueba resultara significativa sería perder un valioso tiempo efectuar las prueba individuales para los efectos de *A y B*, ya que ambas deben resultar significativas, es decir, hay un efecto combinado de ambos factores en la respuesta de la variable. Seguidamente desarrollamos un ejemplo para ilustrar el procedimiento de pruebas de hipótesis en experimentos factoriales.

Ejemplo 8.2 En una empresa industrial la gerencia de producción desea probar cuatro máquinas que producen bolsas de cereales de ¼ de kilogramo y al mismo tiempo evaluar a sus trabajadores capacitados en tres métodos distintos de llenado. Se han registrado el número de bolsas de cereal que no cumplen con el estándar establecido por la gerencia de calidad, en una hora de producción. Los datos se muestran en la tabla 8.6.
Realizar las pruebas de significación:
para las máquinas (factor *A),*
para los métodos de producción(factor *B*) y
para evaluar si existe un efecto combinado de las máquinas y los métodos, es decir, la interacción debido a *A* y *B*.
¿Qué conclusiones se puede extraer del resultado de las pruebas?
¿Qué tipo de máquina y qué método de producción deberá adoptar en el futuro la empresa en cuestión?

Para responder a las preguntas planteadas, las hipótesis que han de evaluarse en este ejemplo son:

1º La interacción entre tipos de máquinas y métodos de llenado de bolsas de cereales es cero; es decir no hay efecto de interacción, se presenta como a continuación:

$H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0$, versus $H_1: (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

2º Los promedios de unidades de bolsas producidos en una hora, por los cuatro tipos de máquinas que no cumplen con las especificaciones son iguales, es decir, las
$H_0: \alpha_i = 0$, contra la alternativa de que las $H_1: \alpha_i \neq 0$.

3º Los promedios de unidades de bolsas producidas en una hora, mediante los tres métodos de llenado, que no cumplen con las especificaciones son todas iguales, es decir, los
$H_0: \beta_j = 0$, contra la alternativa de que los $H_1: \beta_j \neq 0$.

Los cálculos de las sumas de cuadrados, de la tabla 8.6, se inician con el término de corrección ec. 8.3

Término de corrección$=\frac{418^2}{36} = 4\,853.444$

Suma de cuadrado del total: $SCT = (15^2 + 13^2 + 12^2 + \cdots + 10^2 + 13^2 + 9^2) - 4853.444$
$= 5\,038 - 4\,853.444 = 184.556$

Suma de cuadrado debido al factor $A = \frac{124^2+101^2+107^2+86^2}{9} - 4853.444 = 82.333$

Tabla 8.6 Número de bolsas de cereal que no cumplen con los estándares, producidos por cuatro máquinas y tres métodos de producción

Métodos de producción(B)	Máquinas(A)				
	A_1	A_2	A_3	A_4	
B_1	15 13 12	12 10 11	10 14 9	8 9 10	
Subtotal	40	33	33	27	133
B_2	14 12 15	13 10 11	11 12 17	11 9 7	
Subtotal	41	34	40	27	142
B_3	14 16 13	10 14 10	12 11 11	10 13 9	
Subtotal	43	34	34	32	143
Total	124	101	107	86	418

Suma de cuadrado debido al factor $B = SCB = \frac{133^2+142^2+143^2}{12} - 4853.444 = 5.056$
Suma de cuadrado debido a la interacción de A y B

$$SC(AB) = \frac{40^2+33^2+33^2+27^2+41^2+34^2+40^2+27^2+43^2+34^2+34^2+32^2}{3} - \frac{44422}{9} - \frac{58302}{12} + \frac{174724}{36}$$
$$= 11.833$$

Suma de cuadrado del error= $SCE = 184.556 - 82.333 - 5.056 - 11.833 = 85.334$

Con estos resultados elaboramos el cuadro del análisis de varianza que se muestra en el tabla 8.7, en la cual se consignan los grados de libertad y los cuadrados medios de todas las fuentes de variabilidad, tal como se presentó en el modelo de la tabla 8.5

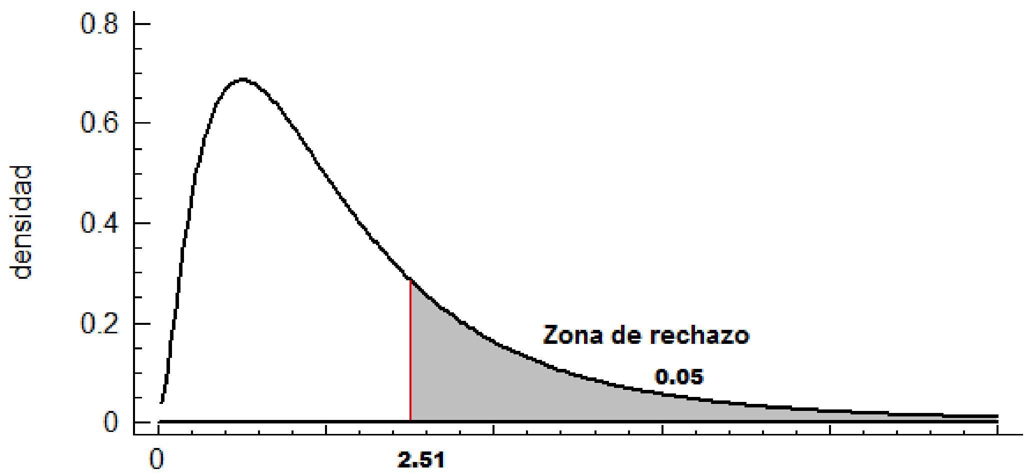
Tabla 8.7 Análisis de varianza de las Máquinas y Métodos del ejemplo 8.2

Fuentes de variabilidad	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	*F*
Factor A	3	82.333	27.444	7.717
Factor B	2	5.056	2.528	0.711
Interacción (AB)	6	11.833	1.972	0.554
Error aleatorio	24	85.334	3.556	
Total	35	184.556		

Concluido el análisis de varianza, vamos a realizar las pruebas de significación:

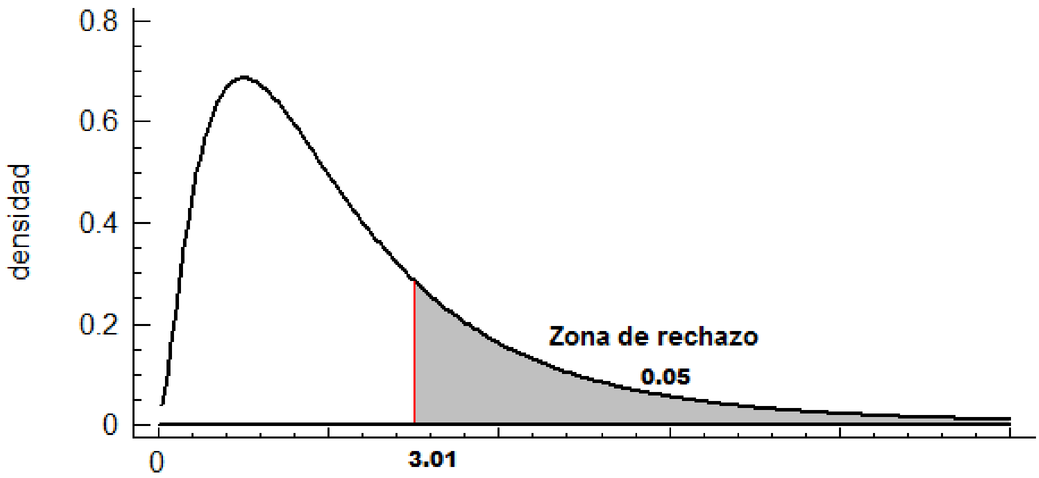
En primer término, podemos probar si existe efecto de la interacción de A (tipos de máquinas) y B (métodos de llenado de bolsas). Utilizando el nivel de significación de $\alpha = 0.05$, la regla de decisión nos dice que se rechaza la hipótesis nula ($H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0$) si el valor calculado de F es mayor que 2.51 (fig. 8.8). Puesto que $F = 0.554 < F_{(6,24)} = 2.51$ no se rechaza la hipótesis nula y se llega a la conclusión de que no existen evidencias suficientes de un efecto de interacción entre el tipo de máquina de la fábrica y el método de llenado de las bolsas de cereal.

Fig. 8.8 Prueba F



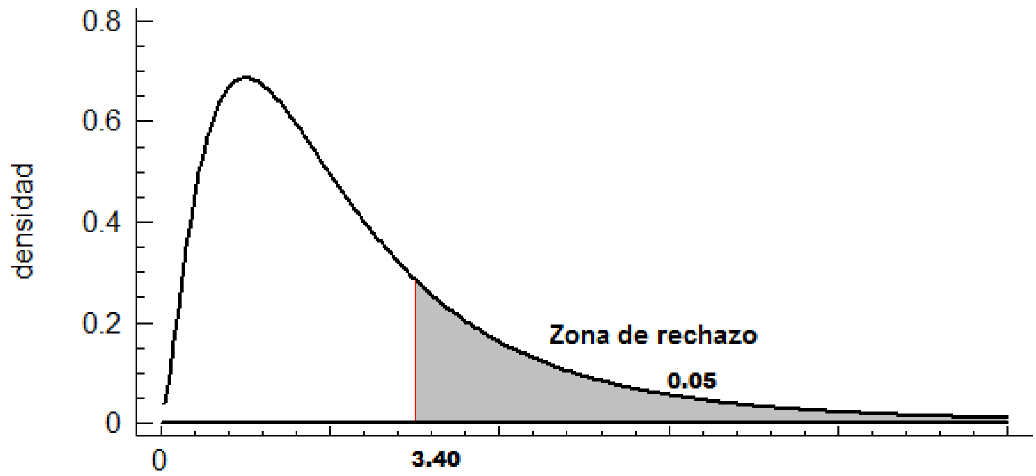
Para la probar la significación del factor *A*, si utilizarnos el mismo nivel de significación del 0.05 para probar la diferencia entre los tipos de máquinas, la regla de decisión será la de rechazar la hipótesis nula ($H_0: \alpha_i = 0$) si el valor de F calculado es mayor que 3.01 (fig. 8.9). Puesto que $F = 7.717 > F_{(3,24)} = 3.01$ se rechaza la hipótesis nula y se llega a la conclusión de que existen evidencias suficientes de las diferencias, entre los tipos de máquinas empleados en el embolsado de cereales.

Fig. 8.9 Prueba F para factor A



Para la prueba del factor *B*, empleando el mismo nivel de significación del $\alpha = 0.05$ se procede a realizar la prueba con el fin de observar si existe alguna diferencia entre los tipos de métodos de llenado de las bolsas de cereales, la regla de decisión a plantear sería la de rechazar la hipótesis nula ($H_0: \beta_j = 0$) si el valor de F calculado es mayor que 3.40 (fig. 8.10). Puesto que el valor de $F = 0.711 < F_{(2,24)} = 3.40$, no se rechaza la hipótesis nula, la no existencia de efecto del factor métodos de embolsado de cereales, por lo tanto llegamos a la conclusión de que no existe diferencia significativa entre los niveles del factor *B*, empleado en el experimento para el llenado de las bolsas de cereal.

Fig. 8.10 Prueba F para factor B



8.8 SOLUCIÓN MEDIANTE STATGRAPHICS

Fig. 8.11 Resultados proporcionados por Statgraphics

Resumen del Procedimiento

Variable dependiente: datos(Y)
Factores:
Factor A
Factor B

Número de casos completos: 36

El StatAdvisor

Este procedimiento realiza un análisis multifactorial de la varianza para datos. Realiza varios tests y gráficos para determinar qué factores tienen un efecto estadísticamente significativo en datos. Teniendo datos suficientes, también analiza las interacciones significativas entre los factores. Los F-tests en la tabla ANOVA le permitirán identificar los factores significantes. Para cada factor significante, los Tests de Rangos Múltiples le indicarán qué medias son significativamente diferentes de otras. El Gráfico de Medias y el Gráfico de Interacción le ayudarán a interpretar los efectos significantes. Los Gráficos de Residuos le ayudarán a juzgar si los datos violan las asunciones subyacentes en el análisis de la varianza.

Análisis de la Varianza para datos - Sumas de Cuadrados de Tipo III

Fuente	Suma de Cuadrados	GL	Cuadrado Medio	Cociente-F	P-Valor
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Factor A	82,3333	3	27,4444	7,72	0,0009
B:Factor B	5,05556	2	2,52778	0,71	0,5012
INTERACCIONES					
AB	11,8333	6	1,97222	0,55	0,7616
RESIDUOS	85,3333	24	3,55556		
TOTAL (CORREG)	184,556	35			

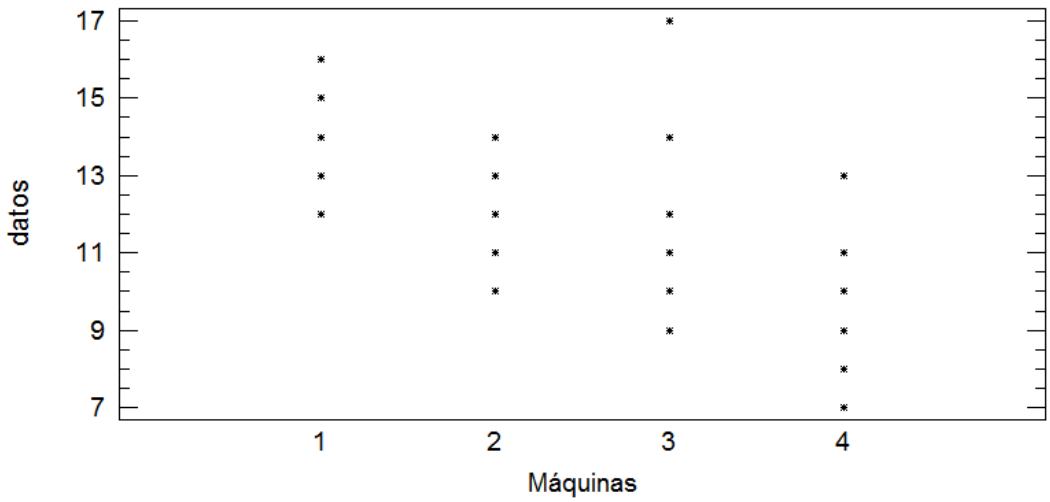
Los cocientes F están basados en el error cuadrático medio residual.

El StatAdvisor

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de datos en las contribuciones debidas a varios factores. Puesto que se ha elegido la suma de cuadrados Tipo III (valor por defecto), se ha medido la contribución de cada factor eliminando los efectos del resto de los factores. Los P-valores comprueban la importancia estadística de cada uno de los factores. Dado que un p-valor es inferior a 0,05, este factor tiene efecto estadísticamente significativo en datos para un 95,0% de confianza.

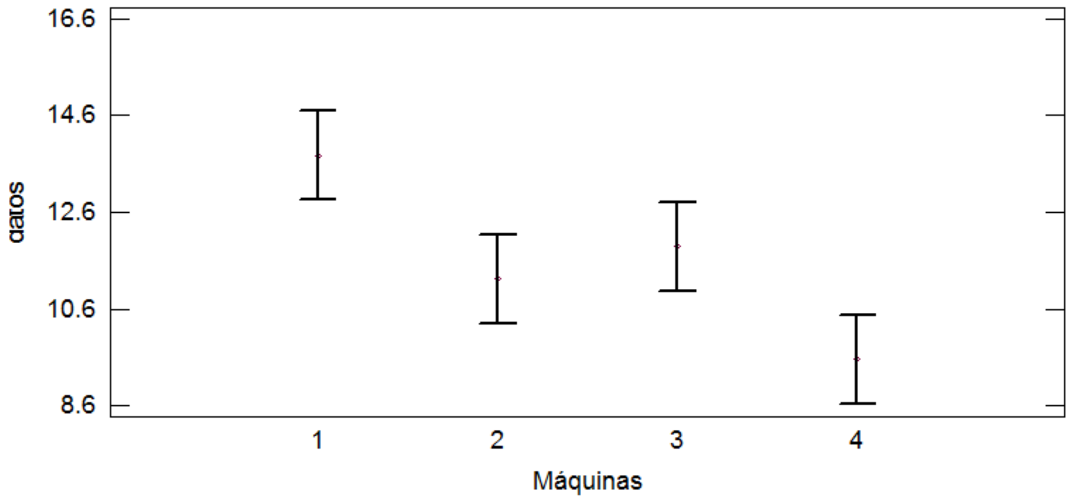
A continuación se presentan los gráficos de los datos del experimento del ejemplo 8.2. En la fig. 8.12 se observa la dispersión de los datos por niveles del factor *A* (tipo de máquinas)

Fig. 8.12 Gráfico de dispersión de datos por niveles del factor A



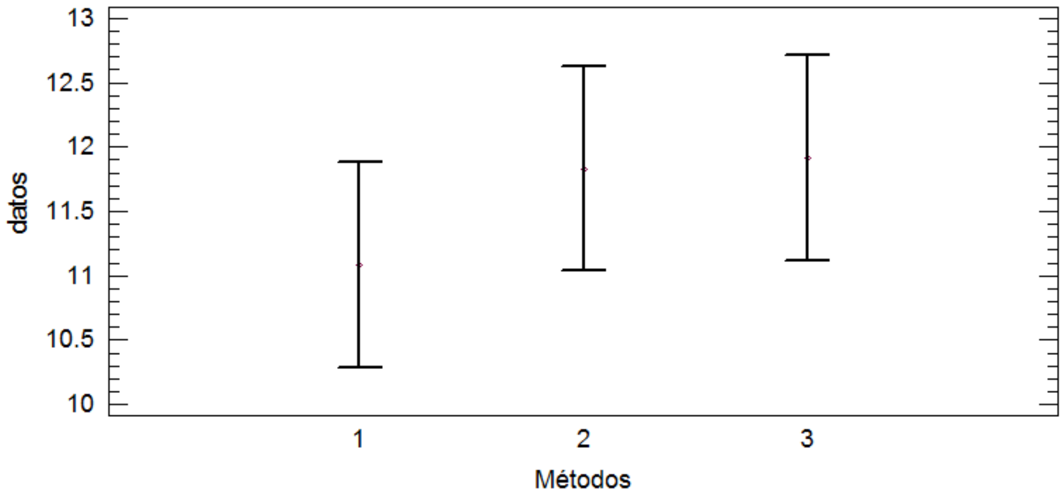
En la fig 8.13 se presenta el gráfico de medias de los tratamientos, del factor A

Fig. 8.13 Gráfico de medias por niveles de A



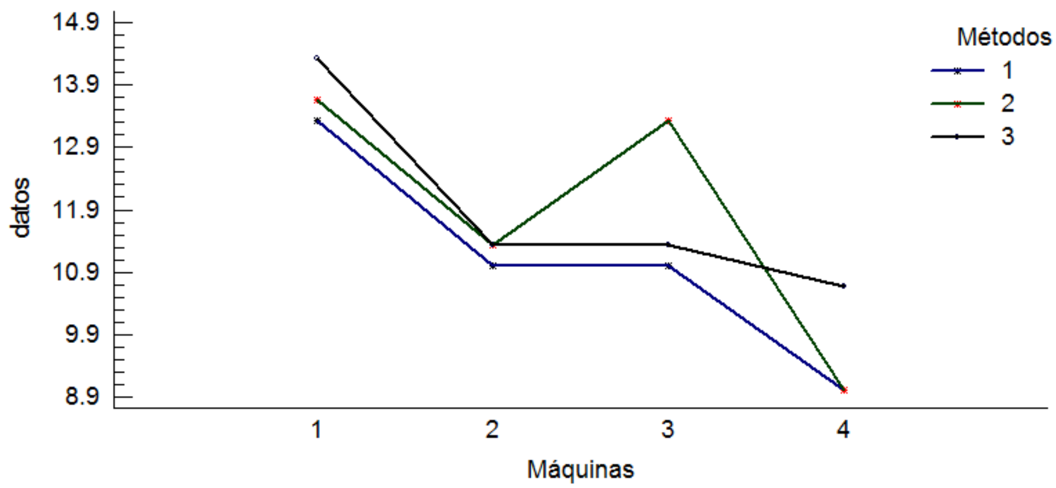
En la fig 8.14 se presenta el gráfico de medias del factor B (métodos de llenado de las bolsas de cereal

Fig. 8.14 Gráfico de medias por niveles de B



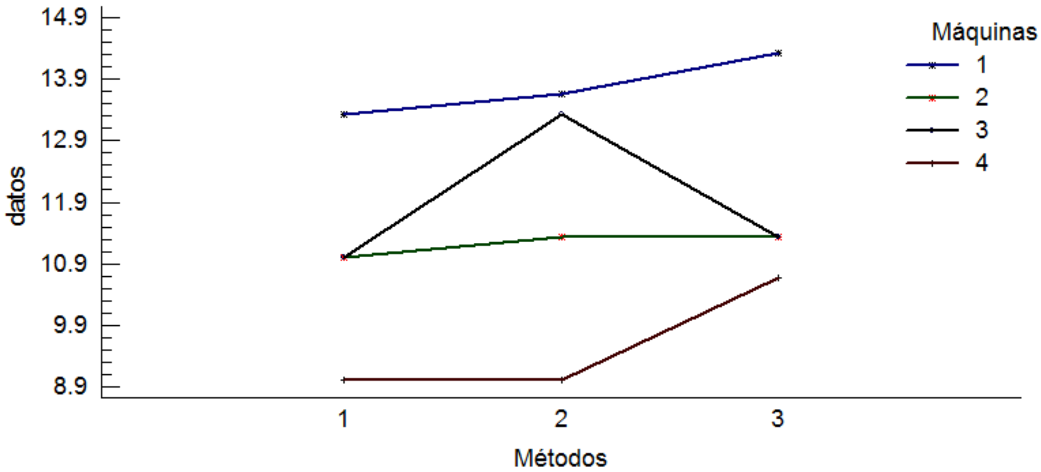
En la fig. 8.15 se ha graficado la producción promedio de las bolsas de cereales que no tienen el peso especificado, por tipo de máquina y método de llenado.
Para el caso del ejemplo en cuestión, las líneas que representan los tres métodos de llenado aparecen casi en su totalidad con una misma orientación frente a las distintas máquinas. Esto bien puede interpretarse como que la diferencia entre el número de bolsas llenadas que no cumplen con las especificaciones es prácticamente la misma, esto significaría que no hay efecto combinado de ambos factores, es decir, interacción, tal como se observó en la prueba *F* del análisis de varianza.

Fig. 8.15 Gráfico de interacción de A*B



En la fig. 8.16 se muestra el gráfico de interacción correspondiente al factor B, métodos de llenado, en ella se puede apreciar dentro los tres niveles del factor, los niveles del factor *A*, máquinas. En este gráfico las líneas para los niveles de *A* frente a niveles de *B* no se cruzan, lo que indica que no existe interacción entre ambos factores.

Fig. 8.16 Gráfico de interacción de A*B



8.9 PRUEBA DE LA DIFERENCIA MÍNIMA SIGNIFICATIVA (DSM)

Para realizar la prueba de Diferencias mínimas significativas, a fin de comparar las medias del factor *A*, *tipos de máquinas*, recurrimos a la ecuación:

$$DSM = t.\sqrt{\frac{2(CME)}{bn}} = (1.711)\left(\sqrt{\frac{2(3.556)}{9}}\right) = 1.521$$

Buscamos el valor de t en la tabla *B* del anexo, con un nivel de significación de 0.05 y 24 grados de libertad del error, es decir, $t_{(0.05,24)} = 1.711$

Contra 1.521 se prueban las diferencias de las medias de las máquinas, las mismas que se distribuyen en la tabla siguiente

	13.78	11.22	11.89	9.56
13.78	-			
11.22	2.56*	-	-	-
11.89	1.89*	0.67	-	-
9.56	4.22*	1.66	2.33*	-

En esta tabla se observa que cuatro comparaciones son significativas, puesto que todas ellas resultan mayores que la DSM, las que están señaladas con un asterisco (*), esto conlleva a rechazar la hipótesis nula, conforme se concluyó en la prueba de *F*. Así mismo, el tratamiento que corresponde a la máquina número 4 es la muestra que presenta una mejor performance puesto que se observa un menor número de bolsas que no cumplen con las especificaciones.

En cuanto a las comparaciones de las medias del factor *B*, *métodos de llenado*, la distribución de las medias se dan en la tabla que sigue:

	11.08	11.83	11.92
11.08	-		
11.83	0.75	-	-
11.92	0.84	0.09	-

La DSM a comparar para el contraste es:

$$DSM = t.\sqrt{\frac{2(CME)}{an}} = (1.711)\left(\sqrt{\frac{2(3.556)}{12}}\right) = 1.317$$

Después de observar las diferencias que se presentan en la tabla, se concluye que ninguna de ellas muestra diferencias significativas, puesto que son menores al valor de la DSM, por lo que no se rechaza la hipótesis nula para esta comparación, lo que ratifica lo encontrado en la prueba *F* del análisis de varianza.

8.10 COMPARACIONES DE RANGOS MÚLTIPLES

Seguidamente, se procede a probar las diferencias particulares que muestran diferencias significativas, tal como se procedió en el diseño de bloques y de factoriales sin réplicas. Existen varios métodos. En este texto se tratarán dos de ellos.

a) **Prueba de Tukey,** procedemos a emplear esta prueba para el factor *A* y para el factor *B*

1° Prueba para el factor A

De acuerdo a la ecuación 6.2, desarrollado en el capítulo VI, presentamos la fórmula:

$$T = q_{\alpha(a,N-a)}\sqrt{\frac{CME}{bn}}$$

Donde q representa los rangos estudiantizados con a y $N - a$ grados de libertad y el nivel de significación α. Para el ejemplo desarrollado, a es igual a 4 niveles de *A y N* es 36 unidades experimentales. En la tabla *E* del anexo, se busca el valor de

$q_{(0.05),(4,32)}$, que resulta igual a 3.84, el valor más cercano, el mismo que se reemplaza en la ecuación anterior para obtener el valor de T, de la siguiente forma:

$$T = (3.84)(\sqrt{\frac{3.556}{9}}) = 2.4137$$

Las diferencias de medias que resultan, se comparan con el valor de $T = 2.4137$. Si la diferencia de medias es mayor que T, entonces se debe rechazar la hipótesis nula, significando que existen diferencias significativas entre los resultados medios del factor A.
Las comparaciones se presentan en la matriz siguiente:

Niveles de A	medias	1 13.78	2 11.22	3 11.89	4 9.56
1	13.78	-	-	-	-
2	11.22	2.56*	-	-	-
3	11.89	1.89	0.67	-	-
4	9.56	4.22*	1.66	2.33	-

De acuerdo a los resultados que se observa en la matriz, solamente dos comparaciones, *1 Vs 4 y 1 Vs 2*, presentan diferencias significativas.

2° Prueba para el factor B

Empleando la ecuación similar, a la antes señalada, realizamos la prueba mediante:

$$T = q_{\alpha(b,N-b)}\sqrt{\frac{CME}{an}}$$

Donde q representa los rangos estudiantizados con b y $N - b$ grados de libertad y el nivel de significancia α. Para el caso, que se viene desarrollando b es igual a 3 niveles del factor B y N es igual a 36 unidades experimentales. El valor correspondiente a $q_{0.05(3,33)}$, resulta igual a 3.44, que reemplazando en la ecuación anterior, se obtiene:

$$T = (3.44)\sqrt{\frac{3.556}{12}} = 1.873$$

Las diferencias de las medias del factor B, se proceden a comparar con 1.873. Si la diferencia de medias resulta mayor que T, se rechaza la hipótesis nula, lo que significa la existencia de diferencias significativas entre las medias de B.
Las comparaciones de las medias del factor B se observan en la siguiente matriz:

	Medias de B		
	11.08	11.83	11.92
11.08	-	0.75	0.84
11.83	-	-	0.09
11.92	-	-	-

En alusión a los resultados que se observan en la matriz, ninguna comparación presenta diferencia significativa, lo que corrobora el resultado de la prueba *F*. Sin embargo, debemos agregar que esta prueba realizado para el factor B, resulta siendo innecesario, dado que la prueba de *F* no mostró diferencias significativas.

b) Prueba de Rangos Múltiples de Duncan.

Vamos a proceder a realizar la prueba, para ambos factores. En primer lugar se ordenan las medias de los tratamientos de menor a mayor,

1º Prueba para el factor A

Se procede a calcular el error estándar, mediante:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{CME}{bn}} = \sqrt{\frac{3.556}{9}} = 0.6285$$

Seguidamente se elabora una tabla simple para los valore de p (posición relativa de las diferencias de medias) y *R* (valor de la tabla de rangos estudiantizados) a fin de calcular los Rangos significativos mínimos (*RSMn*), para todas las posiciones relativas de las diferencias de medias de los niveles del factor *A*, el mismo que es igual a:

$$RSMn = R(0.6285)$$

Posición relativa en el ordenamiento, p.	**2**	**3**	**4**
Valores estudiantizados, R (5%)	2.919	3.066	3.160
$RSMn = R(0.6285)$	1.835	1.927	1.986

Se ordenan las medias de menos a más, y se comparan con los valores de *RSM*n.

Niveles del Factor A	4	2	3	1
Media	9.56	11.22	11.89	13.78

Comparaciones

Medias	4	2	3	1
	9.56	11.22	11.89	13.78
4 (9.56)	-	-	-	-
2 (11.22)	1.66	-	-	-
3 (11.89)	2.33*	0.67	-	-
1 (13.78)	4.22*	2.56*	1.89*	-

Como se puede notar en la matriz, existen cuatro diferencias que presentan significación. Las comparaciones se realizan de la siguiente manera: se compara el mayor con el menor; *1 Vs 4*, que resulta igual a 4.22, el mismo que se compara con 1.986, dado que la diferencia es mayor, se coloca un asterisco (*), luego se compara el *1 Vs 2*, que también resulta significativo, frente a 1.927, seguidamente se procede a comparar el *1 Vs 3,* cuya diferencia comparado con 1.835, resulta mayor, por lo que se considera significativo la diferencia. Para culminar con la ilustración de la tabla de resultados, las comparaciones se realizan del mayor con el menor, luego con el segundo menor, hasta completar la serie. Posteriormente se compara el segundo mayor con el menor y así sucesivamente.

2º Prueba para el factor B

Se procede a calcular el error estándar mediante:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{CME}{an}} = \sqrt{\frac{3.556}{12}} = 0.5444$$

Se elabora la tabla, similar que en el caso de A, teniendo en consideración que el factor B, tiene solamente tres niveles por lo tanto las comparaciones serán menores que en el caso anterior.

Posición relativa en el ordenamiento, p	2	3
Valores estudiantizados, R (5%) $RSMn = R(0.5444)$	2.919 1.589	3.066 1.669

Se ordenan las medias del factor B

Niveles del Factor B	1	2	3
Media	11.08	11.83	11.92

Comparaciones

Medias	1	2	3
	11.08	11.83	11.92
1 (11.08)	-	-	-

2 (11.83)	0.75	-	-
3 (11.92)	0.84	0.09	-

Como el lector puede notar, no se observa ninguna diferencia significativa entre las medias de los niveles del factor *B*, como ya se concluyó en la prueba *F* del análisis de varianza.

Como se manifestó en la prueba *F*, del factor *B* de Tukey, en esta ocasión igualmente la prueba era innecesaria, puesto que si la prueba de *F* no presenta diferencias significativas, no es pertinente realizar la prueba de Duncan. Sin embargo, por fines didácticos lo realizamos.

PALABRAS CLAVE

Interacción
Experimento factorial
Factor experimental
Respuesta
Niveles de factor

Ejercicios Propuestos

1. En el laboratorio de una universidad privada de la región se realizó una investigación referente a la sobrevivencia de una bacteria con respecto al tipo de vegetal empleado como alimento y la temperatura de almacenamiento. Los vegetales empleados fueron: Brócoli, Lechuga, Perejil y Zanahoria, con tres niveles de temperatura: 10, 15 y 20 ºC. El porcentaje de sobrevivencia de la bacteria después de 36 horas de efectuado la inoculación se muestra a continuación.

Temperatura °C	Tipo alimento							
	B		L		P		Z	
10	13	13	18	22	8	8	7	7
	14	15	19	24	9	9	9	6
	12	11	15	25	7	10	5	9
15	17	20	20	17	19	32	12	11
	18	20	16	20	20	23	13	12
	21	22	18	23	20	30	13	14
20	25	23	28	26	30	32	23	26
	24	31	27	28	30	27	29	31
	29	30	29	29	28	34	28	28
TOTAL								

a) Formular las hipótesis adecuadas
b) Elaborar un análisis de varianza e interpretar los resultados
c) Realizar una prueba de comparaciones múltiples

2. Se desea probar dos variables en el cultivo del maíz, la densidad de siembra y niveles de fertilización. La densidad de siembra se prueba a tres niveles y la fertilización en cuatro niveles. Los resultados con tres réplicas se aprecian en la tabla que sigue. La variable respuesta a medir es, kilogramos por parcela.

Densidad	Fertilización			
	20	25	30	35
10000	13	18	8	7
	12	15	7	5
	13	24	9	6
12500	17	20	19	12
	21	18	20	13
	20	20	23	12
15625	25	28	30	23
	29	29	28	28
	31	28	27	31

a) Formular las hipótesis adecuadas
b) Elaborar una tabla de análisis de varianza e interpretar los resultados
c) Realizar una prueba de comparaciones múltiples y manifestar sus conclusiones.

3. Se desea estudiar el efecto que produce el factor A: máquina y el factor B: hombre, en la producción de sacos de harina premezclada para la elaboración de panes navideños de 25 kilogramos. Con este fin se empleó máquinas procesadoras de seis marcas diferentes y cuatro operarios con años de servicio distintos(10,15,20 y 25 años)
En la tabla siguiente se han registrado los datos con repetición, del número de sacos de harina de 25 kilogramos, que no cumplen con los estándares establecidos por la gerencia de producción y calidad en la producción de un día.

$B = hombre$	$A = máquina$					
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
I	10	12	15	8	5	5
	8	13	13	5	7	6
	7	15	10	6	4	3
II	5	4	6	5	5	4
	6	5	6	5	4	3
	8	2	5	4	4	5
III	12	10	9	11	5	8
	13	10	6	10	5	3
	12	5	4	4	3	6
IV	5	2	5	5	2	2
	3	3	6	4	2	4
	2	4	2	1	3	1

a) Formular las hipótesis adecuadas
b) Elabore la tabla de análisis de varianza e interprete los resultados
c) Realiza una aprueba de DMS, para los factores $A\ y\ B$

4. Con los datos del ejercicio 3, realizar la prueba de comparaciones múltiples de Duncan y elegir la mejor combinación de tratamiento.

5. Una empresa dedicada a la consultoría privada está interesado en un programa para calcular fórmulas matemáticas. Le presentan cinco programas(factor A)para tal fin: P_A, P_B, P_C, P_D, P_E. La empresa en cuestión cuenta con seis tipos de ordenadores (factor B) y se pretende indagar si el tiempo de cálculo de los cinco programas ofrecidos es el mismo. Para realizar el experimento se diseña empleando un experimento factorial con dos factores sin replicas. Los tiempos promedios de cálculo (en minutos) se presentan en la tabla que sigue.

    a) Plantear las hipótesis adecuadas.
    b) Con un nivel de significación del 0.05 probar si los efectos de los programas son iguales.
    c) Con un nivel de significación del 0.05 probar si los efectos de los ordenadores son todos iguales.

FACTOR B (ordenadores)	FACTOR A(Programas)				
	p_A	P_B	P_C	P_D	P_E
I	20	15	25	28	12
II	21	16	26	30	15
III	18	12	27	32	9
IV	15	17	24	25	10
V	23	16	25	28	13
VI	24	20	24	29	14

d) Probar si hay efecto de la interacción.
e) Manifestar sus conclusiones referentes al problema planteado.
f) Si existen diferencias significativas realizar la prueba de rangos múltiples de Duncan para el factor que muestra significación en la prueba *F.*

6. Realice la prueba de Tukey para los datos del problema 5, e interpretar sus resultados.

7. Con los datos del problema 2, realizar el análisis estadístico añadiendo 9 a cada uno de los datos de la columna 4, correspondiente al nivel 35 de fertilización.

a) Formular las hipótesis adecuadas.
b) Elaborar una tabla de análisis de varianza e interpretar los resultados.
c) Realizar una prueba de comparaciones múltiples y manifestar sus conclusiones.

8. Realizar el análisis estadístico de los datos del problema 3, sustraendo 4 unidades a cada uno de los datos de la columna 2, correspondiente a la maquina nº 2

a) Formular las hipótesis adecuadas.
b) Elabore la tabla de análisis de varianza e interprete los resultados.
c) Realiza una aprueba de *DMS*, para los factores *A y B.*

9. Se probaron cinco variedades de Cebolla con cuatro fertilizantes orgánicos en un valle del Perú. El experimento se condujo en un diseño completamente al azar con tres repeticiones por cada parcela, se anotaron los resultados como se aprecia en la tabla siguiente. Analizar el experimento para variedades y fertilizantes orgánicos, y manifieste sus conclusiones.

a) Realizar la prueba para la interacción de fertilizantes y variedades.
b) Realice la prueba para fertilizantes.
c) Realizar la prueba para variedades de cebolla, en todos los casos emplee un nivel del 0.05.
d) Graficar la interacción empleando el paquete Statgraphics Centurion.

Fertilizante	Variedades				
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
F_1	57	26	39	23	48
	46	38	39	36	35
	28	20	43	18	48
F_2	67	44	57	77	61
	72	68	61	47	60
	66	64	61	69	75
F_3	95	92	91	98	78
	90	89	82	85	89
	89	99	98	83	95
F_4	92	96	99	99	99
	88	95	93	90	98
	99	99	98	98	99

10. Formular un problema de su profesión, en el que se aplique el análisis de varianza para experimentos factoriales.
11. Se llevó a cabo en la región Tacna, un experimento para estudiar dos factores que influyen en el rendimiento de estudiantes de colegios secundarios. Los factores en cuestión son: *lugar de procedencia* de los alumnos y *nivel socioeconómico* de sus padres. Los datos se muestran en la tabla siguiente:

Nivel socioeconómico	Lugar de procedencia				
	Puno	Arequipa	Tacna	Moquegua	Lima
Bajo	15	11	14	12	13
	14	14	14	11	14
	13	13	14	10	13
Medio	12	15	15	13	15
	13	16	13	12	16
	12	13	14	13	14
Alto	15	14	13	15	15
	14	14	12	13	15
	13	17	12	14	16
Muy alto	15	16	15	15	16
	16	15	14	12	16
	17	16	16	13	17

a) ¿Existen diferencias significativas en el rendimiento de los estudiantes por lugar de procedencia?
b) ¿Existen diferencias significativas en el rendimiento de los estudiantes de acuerdo al nivel socioeconómico de sus padres?
c) ¿Existen diferencias significativas en el rendimiento de los estudiantes de acuerdo al efecto combinado del lugar de procedencia y nivel socioeconómico?

...

CAPÍTULO IX

EXPERIMENTOS CONDUCIDOS EN ESPACIOS Y TIEMPOS DIFERENTES

Es muy frecuente que las investigaciones deben ser susceptibles de replicarse en momentos y áreas geográficas diferentes. El rendimiento o propiedades de una cosecha puede estar influenciado por el suelo, por el clima, por el medio, así como tener rendimiento distinto en años diferentes. Es por ello, que para ciertos tipos de investigación que están afectados fuertemente por factores medioambientales, los experimentos individuales son limitados, debido a que sus resultados son aplicables solamente a sitios y años particulares. Bajo este criterio, es muy difícil extrapolar resultados de un área geográfica a otras situaciones en la cual pueden presentarse eventos relacionados con el suelo, temperatura, drenaje, manejo del cultivo y vientos. Las extrapolaciones si se realizan, sin embargo, tendrán poca utilidad práctica en el terreno agrícola. La utilidad radicará en series amplias de experimentos, ya que los experimentos individuales pueden no ser dignos de toda la confianza para la investigación.

Así, los investigadores van descubriendo factores desconocidos que pueden actuar en forma diferencial en los tratamientos, de tal modo, que una proporción importante de los resultados no son confiables. Es por ello que, un nivel de significación del 5% no es en todo caso, una buena proporción, la mejor medida será repetir el experimento, ya que pueden proporcionar otros criterios, como por ejemplo, la interacción de los tratamientos y el lugar, tratamientos y años.

La serie de lugares, la constituyen las distintas localidades, que representan a la población a las cuales va dirigida los resultados e inferencias de la investigación que se derivan del experimento. En el ideal de los casos, es deseable que las localidades o lugares en donde se van a llevar a cabo los experimentos, sea seleccionado en forma aleatoria, sin embargo, no corresponde íntegramente al investigador, debido a la falta de seguridad en encontrar el lugar adecuado para llevar a cabo el experimento en las localidades escogidas al azar. Se considera que un trabajo de investigación por lo menos debe realizarse, a tres años, para que sus resultados proporcionen, elementos de juicio razonables sobre el clima, en los lugares seleccionados.

9.1 INSTALACIÓN DEL ENSAYO

Para estos tipos de investigaciones, que se llevan a cabo en distinto espacios y tiempos, debe procurarse que los diseños experimentales sea el mismo en las diferentes localidades, y años, y al mismo tiempo tratar que el experimento tenga el mismo número de niveles de tratamiento, repeticiones, formas y tamaños iguales. Estas especificaciones son importantes llevarlas a la práctica puesto que facilitan el análisis. Las disposiciones de los ensayos, en todos los lugares también debe ser el mismo. Lo único permitido es la aleatorización de las unidades experimentales la que debe realizarse de acuerdo al lugar del experimento.

Cuando se combinan los resultados de los análisis estadísticos de los experimentos, es posible determinar con certeza si los tratamientos reaccionan de manera diferente en los diferentes medioambientes (localidad-año). Es latente la presencia de interacciones de los tratamientos con los factores medioambientales, esto hace que no sea recomendable la generalización de los resultados alcanzados en los diferentes medioambientes, por lo que el investigador debe tener mucha cautela al generalizar sus recomendaciones.
Las ventajas que tiene el analizar en forma combinada los datos de una serie de experimentos, nos provee de información respecto a los medioambientes en las cuales se producen los experimentos. Sin embargo, estos pueden ocasionar desventajas a los resultados globales del experimento, entre las cuales podemos señalar los siguientes:

La variabilidad observada entre los lugares en donde se llevan a cabo los experimentos pueden no ser homogéneos.
Así mismo, los efectos combinados de los tratamientos con los medioambientes, tampoco son con frecuencia homogéneos.

A fin de probar la heterogeneidad de las variaciones, se puede recurrir a la prueba clásica de homogeneidad de varianzas, mediante la prueba de Bartlett (1937) y Hartley (1950).

9.2 EXPERIMENTOS EN DIFERENTES LOCALIDADES DENTRO DE UN AÑO Y DISEÑOS IGUALES

9.2.1 Para niveles de tratamiento tipo cualitativo

Para llevar a cabo experimentos en diferentes lugares se debe procurar uniformizar el procedimiento de planificación de los ensayos, haciendo que el número de tratamientos sean iguales en todos los lugares, así como los bloques, filas o hileras, dependiendo del diseño que se va a emplear.
En consecuencia, el análisis de varianza combinado debe contener las siguientes fuentes de variabilidad.

1º Análisis de Varianza Combinado

Si los experimentos se conducen en un diseño de bloques completos al azar en todas las localidades, las fuentes de variabilidad formalmente son, los lugares, bloques dentro de las localidades, tratamientos, la interacción de lugares y tratamientos y un componente del error. Es conveniente que en cada lugar, en la que se lleva a cabo el experimento, el proceso de aleatorización sea de manera independiente para garantizar resultados de calidad, a pesar que el diseño se recomienda sea el mismo en cada lugar.

FUENTES DE VARIABILIDAD	GL
Lugares	$L-1$
Bloques en localidades	$(b-1)(L)$
Tratamientos	$t-1$
Lugares x tratamientos	$(L-1)(t-1)$
Error	$(b-1)(t-1)(L)$

Donde, L: es el número de lugares o localidades; b: número de bloques en lugares; t: número de tratamientos en lugares;

Ejemplo 9.1 Se ha llevado a cabo experimentos en distintos lugares del Perú, en un diseño de bloques completos al azar: Región 1, Región 2, Región 3, Región 4, Región 5, respecto al rendimiento de cinco variedades del cultivo de Esparrago. Los datos se observan en las tablas que a continuación se presentan.

Tabla 9.1 Rendimiento de Espárrago
Lugar: Región 1

Bloques	Variedades(Tn/ha)				
	1	2	3	4	5
I	5.8	6.5	5.8	7.2	4.6
II	6.1	6.8	5.2	7.6	4.5
III	4.8	6.4	5.0	7.8	4.4
IV	5.0	6.7	5.1	7.9	4.1
Total	21.7	26.4	21.1	30.5	17.6

Tabla 9.2 Rendimiento de variedades de espárrago
Lugar: Región 2

Bloques	Variedades(Tn/ha)				
	1	2	3	4	5
I	4.3	3.9	5.3	2.8	3.1
II	3.5	3.7	5.1	3.5	2.8
III	4.0	4.1	5.0	3.2	2.9
IV	3.9	4.2	4.6	3.1	2.6
Total	15.7	15.9	17.0	12.6	11.4

Tabla 9.3 Rendimiento de variedades de espárrago
Lugar: Región 3

Bloques	Variedades(Tn/ha)				
	1	2	3	4	5
I	2.6	3.6	2.9	4.3	3.0
II	2.3	3.2	2.8	4.4	3.2
III	2.7	3.1	3.4	5.0	3.3
IV	2.2	3.4	3.7	4.6	3.7
Total	9.8	13.3	12.8	18.3	13.2

Tabla 9.4 Rendimiento de variedades de espárrago
Lugar: Región 4

Bloques	Variedades(Tn/ha)				
	1	2	3	4	5
I	8.6	6.6	4.9	5.3	6.4
II	7.9	6.2	4.8	5.4	7.2
III	8.2	6.1	4.4	5.0	7.3
IV	8.1	6.4	4.7	5.6	7.7
Total	32.8	25.3	18.8	21.3	28.6

Tabla 9.5 Rendimiento de variedades de espárrago
Lugar: Región 5

Bloques	Variedades(Tn/ha)				
	1	2	3	4	5
I	8.7	7.6	6.9	5.8	5.4
II	8.9	7.2	6.8	5.8	6.2
III	8.6	7.1	6.4	5.6	6.3
IV	8.4	7.4	6.7	5.9	6.7
Total	34.6	29.3	26.8	23.1	24.6

Solución

Para la solución de la serie de experimentos, se debe elaborar un análisis de varianza para cada lugar del tratamiento, de manera que se tenga cinco tablas de ANVA, y a partir de ellas elaborar tablas combinadas que ayudan en la solución final del experimento.

Tabla 9.6 Análisis de varianza para el experimento en Región 1

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:tratamiento	25.303	4	6.32575	46,37	0,0000
B:bloques	0.4455	3	0.1485	1,09	0,3913
RESIDUOS	1.637	12	0.1364		
TOTAL (CORREGIDO)	27,3855	19			

Tabla 9.7 Análisis de varianza para el experimento en Región 2

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:tratamiento	11.237	4	2.80925	34,43	0,0000
B:bloques	0.136	3	0.04533	0,56	0,6542
RESIDUOS	0.979	12	0.08158		
TOTAL (CORREGIDO)	2.352	19			

Tabla 9.8 Análisis de varianza para el experimento en Región 3

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:tratamiento	31.343	4	7.8358	67,72	0,0000
B:bloques	0.236	3	0.0787	0,68	0,5812
RESIDUOS	1.389	12	0.1157		
TOTAL (CORREGIDO)	32.968	19			

Tabla 9.9 Análisis de varianza parta el experimento en Región 4

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:tratamiento	9.337	4	2.33425	28,38	0,0000
B:bloques	0.418	3	0.1393	1,69	0,2211
RESIDUOS	0.987	12	0.08225		
TOTAL (CORREGIDO)	10.742	19			

Tabla 9.10 Análisis de varianza para el experimento en Región 5

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:tratamiento	20,437	4	5,10925	50,80	0,0000
B:bloques	0,148	3	0,0493333	0,49	0,6954
RESIDUOS	1,207	12	0,100583		
TOTAL (CORREGIDO)	21,792	19			

Culminado el recuento de los datos de los experimentos en cada uno de los lugares considerados en el experimento, se elabora una tabla de los resultados combinados, denominado de los *rendimientos de tratamientos*, que se observa en la tabla 9.11

Tabla 9.11 Totales de rendimientos de los tratamientos de espárragos, según lugar del experimento(Tn/ha)

LUGAR	**TRATAMIENTOS**					TOTAL
	1	2	3	4	5	
Región 1	21.7	26.4	21.1	30.5	17.6	117.3
Región 2	15.7	15.9	17.0	12.6	11.4	72.6
Región 3	9.8	13.3	12.8	18.3	13.2	67.4
Región 4	32.8	25.3	18.8	21.3	28.6	126.8
Región 5	34.6	29.3	26.8	23.1	24.6	138.4
TOTAL	114.6	110.2	96.5	105.8	95.4	522.5

Se analizan los experimentos en todas las localidades y se elabora la tabla de los cuadrados medios, como la tabla 9.12

Tabla 9.12 Cuadrados medios de localidades

F. de V.	G.L	LUGARES				
		Región 1	Región 2	Región 3	Región 4	Región 5
Tratamiento	4	6.32575	2.80925	2.33425	7.83575	5.10925
Bloques	3	0.1485	0.0453333	0.139333	0.0786667	0.0493333
Error	12	0.136417	0.0815833	0.08225	0.11575	0.100583

En todos los experimentos realizados en los lugares señalados, fueron significativos los valores F para tratamientos contra el error experimental. De particular interés resulta el experimento conducido en la región 1, ya que muestra los mayores rendimientos logrados por el espárrago.
Seguidamente, se calcula el análisis de varianza combinado. Las tres primeras componentes del ANVA, se calculan en la misma forma que se procede cuando el análisis es individual, es decir, para un solo experimento. En todos los casos, se debe considerar un cuatro (4) adicional para el cálculo de las sumas de cuadrados, debido a que cada subtotal de tratamiento contiene cuatro bloques en cada lugar. Así, para la suma de cuadrados de los lugares, se hace:

SUMA DE CUADRADOS DE LUGARES

$$\text{SC L} = \frac{117.3^2+72.6^2+67.4^2+126.8^2+138.4^2}{20} - \frac{522.5^2}{100} = 210.218$$

SUMA DE CUADRADOS DE BLOQUES EN LOCALIDAD
Es la suma de cuadrado de todos los bloques mancomunados sobre todas las localidades, se calcula mediante la suma de todos los cuadrados medios de bloques en diferentes localidades multiplicadas por el número de bloques en cada lugar disminuido en 1. En la tabla 9.12 se presentan los Cuadrados Medios, y se procede como se observa a continuación

$$SC\ B = (\sum CMB)(b-1) = (0.4611663)(3) = 1.3834989$$

SUMA DE CUADRADO DE TRATAMIENTOS
De la tabla 9.11, se extraen los totales de tratamiento, los que deben dividirse entre cinco localidades por cuatro bloques (20). Así:

$$SC\ t = \frac{114.6^2+110.2^2+96.5^2+105.8^2+95.4^2}{20} - \frac{522.5^2}{100} = 14.5$$

SUMA DE CUADRADOS DE LUGARES POR TRATAMIENTO

$$SC\ (L\ x\ t) = SC\ del\ total\ combinado - SC\ L - SC\ t$$

De la tabla 9.11, se elevan al cuadrado los datos de todas las celdas para calcular la suma de cuadrados de totales

$$SC\ T_{combi} = \left(\frac{21.7^2+15.7^2+9.8^2+\cdots+13.2^2+28.6^2+24.6^2}{4} - \frac{522.5^2}{100}\right) - 210.218 - 14.5$$

$$SC\ (L\ x\ t) = \left(\frac{12129.67}{4} - \frac{273006.25}{100}\right) - 210.218 - 14.5 = 302.355 - 210.218 - 14.5$$

$$SC\ (L\ x\ t) = 77.637$$

SUMA DE CUADRADO DEL ERROR COMBINADO

$$SC\ E = (\sum CME)(b-1)(t-1)$$

Donde la suma de los cuadrados medios, $\sum CME$, se refiere a los cuadrados medios de todas las localidades donde se llevó a cabo el experimento.

$$SC\ E = (0.136417 + 0.0815833 + 0.08225 + 0.11575 + 0.100583)(3)(4)$$
$$SC\ E = 6.1989996$$

Por lo tanto el análisis de varianza combinada para el experimento en diferentes lugares, queda definido siguiendo el formato señalado en el acápite 9.2, de este capítulo y presentado en la tabla 9.13, de la siguiente manera:

Tabla 9.13 Análisis de varianza combinado

F. de V	*GL*	*SC*	*CM*	*F*
Lugares	4	210.218	52.55	
Bloques en lugares	15	1.3834989	0.09	
Tratamiento	4	14.5	3.63	31.14
Lugares x tratamiento	16	77.637	4.85	46.95
Error	60	6.1989996	0.1033	

La hipótesis nula, de que las diferencias entre las medias de los tratamientos en los distintos lugares es la misma, $H_0: (Lxt) = 0$, es decir que no hay efecto de interacción tratamientos y lugares, se prueba mediante el valor de *F*, que resulta del cociente $\frac{4.85}{0.1033}$ ó 46.95, con 16 y 60 grados de libertad respectivamente. Al nivel de significación del 5% el valor de la tabla *F* es 1.81, lo que significa que existen diferencias estadísticas significativas, lo que equivale a manifestar que se observa algún efecto de interacción, entre *lugares y tratamientos* por lo tanto se rechaza la hipótesis nula.

Es frecuente considerar o esperar que existan interacciones, por las condiciones experimentales de los lugares, es decir los medioambientales.

En cuanto a los tratamientos, es decir las variedades de espárrago, en los distintos lugares, en estos tipos de investigaciones de una serie de experimentos, algunas veces resulta de poco interés, ya que en los lugares del experimento, como es nuestro caso, se encontró diferencias estadísticas significativas. El origen del reducido interés radica en que los lugares no fueron elegidos aleatoriamente de un gran número de localidades de interés para realizar inferencias. Es así que, para la prueba de F para estudiar el efecto de los tratamientos hay dos consideraciones que se puede tener presente para calcular el cociente F, el cuadrado medio de las interaccione o el cuadrado medio del error combinado o en algunos casos como recomienda, Cochran, W. y Cox, G.(1997)[15] se puede combinar ambos cuadrado medios para tener un solo denominador, $(4.85 + 0.1033)/2$ igual a 2.47665, en ese caso el valor de F resulta $\frac{3.63}{2.47665} = 1.46569$ que resulta a las claras estadísticamente significativa al nivel del 5%, aun así, puede presumirse como investigadores, que hubo la presencia de interacciones de *lugar y tratamiento*, como fue corroborado por la prueba.

2º Modelo matemático del análisis combinado

El modelo matemático en la cual se basa el análisis combinado de los datos en una serie de experimentos, como la que estamos tratando, es:

$$Y_{ij} = \mu + \rho_i + \tau_j + (\rho\tau)_{ij} + \bar{e}_{ij}$$

Donde: ρ_i, representa el efecto de lugares del experimento; τ_j, representa el efecto de los tratamientos; $(\rho\tau)_{ij}$, representa el efecto de la interacción de tratamiento x lugar; $\bar{e}_{ij}$, es el promedio de los errores en los bloques que reciben el tratamiento en los lugares.
A partir de este modelo matemático del análisis combinado, se puede estudiar la naturaleza de los cuadrados medios esperados en el ANVA,

9.2.2 Tratamientos cuantitativos en serie de experimentos

El procedimiento para experimentos cuando los niveles de tratamientos son cuantitativos es similar al modelo cualitativo. Salvo que en este caso nos permite realizar estimaciones a futuro. Así por ejemplo, Laird y Cady (1969) estudiaron modelos de regresión con datos combinados, provenientes de una serie de experimentos como respuesta a los niveles de fertilización empleado en el experimento. Es decir, se establecen modelo regresionales con los niveles de los tratamientos (variable independiente) y las respuestas del experimento (variable dependiente), lo que permite cuantificar el desempeño de la variable

[15] En el libro Diseños Experimentales,(1997)

independiente en los próximos años. Está claro que las estimaciones no deben ir más allá de los tres años, que es lo más recomendable y permitido. Los autores mencionados, emplearon la ecuación para predecir los rendimientos en localidades nuevas y para estimar las cantidades óptimas de fertilizante.

9.3 EXPERIMENTOS COMBINADOS EN DIFERENTES AÑOS

En estos experimentos, se suele tener especial atención a la variabilidad que representa el factor año. Puesto que, de un año a otro pueden presentarse una serie de fenómenos naturales que propenden a aumentar los problemas de heterogeneidad e influyen seriamente en los resultados del experimento de un año a otro.
Los elementos a tener en cuenta en un experimento llevado a cabo en diferentes localidades y años; bajo un diseño de bloques completos al azar son:

Tratamientos	: Niveles (t)
Bloques	: b
Años	: a
Lugares	: L

El interés del investigador va más allá del año, dado que el interés en el resultado de su investigación se amplía a una serie de años, y a las posibles interacciones de los niveles de tratamiento en el horizonte de los años. En estos tipos de experimentos se presenta una similitud, con experimentos en parcelas divididas, es decir, los niveles de tratamiento son análogos a la parcela principal (t), los años a las sub parcelas(a) y si existe además otro elemento como ser, diferentes cosechas(c) en una campaña, serán las sub-subparcelas. En cambio, la interacción de $t\, x\, a\, x\, c$, no representa un elemento de primera importancia en estos experimentos. Para la toma de decisión respecto al nivel de tratamiento de mejor desempeño, se requiere los resultados del análisis anual y de los años posteriores.
A fin de ilustrar el procedimiento descrito, para una serie de experimentos durante varios años, utilizaremos los datos de tres años del siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.2 Se llevó un experimento en Papa en una región del país. El experimento se dispuso bajo un diseño de bloques completo al azar, con cinco variedades de papa y cinco bloques, Los datos para tres años se presentan a continuación.

Tabla 9.14 Producción de papa Tn/ha , 1º año

Bloques	Variedades					Total Bloques
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
I	15	15	20	10	19	79
II	16	16	21	14	20	87
III	14	17	23	11	21	86
IV	13	16	19	13	22	83
V	12	18	18	14	24	86
Total Tratamiento	70	82	101	62	106	421

Tabla 9.15 Producción de papa Tn/ha , 2º año

Bloques	Variedades					Total Bloques
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
I	13	14	22	13	24	86
II	12	15	23	13	25	88
III	14	15	21	12	26	88
IV	10	16	24	11	24	85
V	11	17	26	10	23	87
Total Tratamiento	60	77	116	59	122	434

Tabla 9.16 Producción de papa Tn/ha , 3º año

Bloques	Variedades					Total Bloques
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
I	12	14	24	12	25	87
II	14	15	25	11	23	88
III	13	16	28	11	24	92
IV	10	14	26	14	21	85
V	12	15	27	13	22	89
Total Tratamiento	61	74	130	61	115	441

Habiéndose recopilado los datos para los tres años que dura la investigación, se sigue los siguientes pasos:
1º Elaborar el análisis de varianza para cada año, lo que vendría a representar la parcela principal.

Tabla 9.17 Análisis de Varianza para Rendimiento de Papa, 1º año

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Trata	291.36	4	72.84	23.57	0.0000
B:bloques	8.56	4	2.14	0.69	0.6079
RESIDUOS	49.44	16	3.09		
TOTAL (CORREGIDO)	349.36	24			

Todas las razones-F se basan en el cuadrado medio del error residual

Tabla 9.18 Análisis de Varianza para Rendimiento de Papa 2º año

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Trata	735.76	4	183.94	72.42	0.0000
B:bloques	1.36	4	0.34	0.13	0.9676
RESIDUOS	40.64	16	2.54		
TOTAL (CORREGIDO)	777.76	24			

Todas las razones-F se basan en el cuadrado medio del error residual

Tabla 9.19 Análisis de Varianza para Rendimiento de papa 3º año

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Trata	829.36	4	207.34	100.41	0.0000
B:bloques	5.36	4	1.34	0.65	0.6358
RESIDUOS	33.04	16	2.065		
TOTAL (CORREGIDO)	867.76	24			

Todas las razones-F se basan en el cuadrado medio del error residual

2º Elaborar una tabla de resumen de los resultados del análisis de varianza, como en la tabla 9.20

Tabla 9.20 Suma de cuadrado y Cuadrado Medio por año

F. de V	GL	SC			CM		
		1º	2º	3º	1º	2º	3º
Bloques	4	8.56	1.36	5.36	2.14	0.34	1.34
Variedades	4	291.36	735.76	829.36	72.84	183.94	207.34
Error (bxv)	16	49.44	40.64	33.04	3.09	2.54	2.065
Total	24	349.36	777.76	867.76			

3º Seguidamente se elabora una tabla de la producción de las variedades de papa combinando la producción de todos los años, a partir de las tablas 9.14, 9.15, 9.16, como se aprecia a continuación

Tabla 9.21 Producción total de papa Tn/ha, durante tres años

Bloques	Variedades					Total Bloques
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
I	40*	43	66	35	68	252
II	42	46	69	38	68	263
III	41	48	72	34	71	266
IV	33	46	69	38	67	253
V	35	50	71	37	69	262
Total Tratamiento	191	233	347	182	343	1296

*40=15+13+12

4º Elaborar el análisis de varianza combinado de los tres años

$$Termino\ de\ corrección\ total: TCT = \frac{1296^2}{25(3)} = 22394.88$$

$$SCBloques: SCB = \frac{252^2+263^2+266^2+253^2+262^2}{5(3)} = 22405.47 - 22394.88 = 10.59$$

$$SCVariedades: SCV = \frac{191^2+233^2+347^2+182^2+343^2}{5(3)} = 24130.13 - 22394.88 = 1735.25$$

$$SC(MP) = \frac{40^2+42^2+\cdots+67^2+69^2}{3} - 22394.88 = 24174.67 - 22394.88 = 1779.79$$

$$SCE(a) = SC(MP) - SCB - SCV = 1779.79 - 10.59 - 1735.25 = 33.95$$

$$SCAños = SCA = \frac{421^2+434^2+441^2}{25} - 22394.88 = 22403.12 - 22394.88 = 8.24$$

$$SC(V*A) = \frac{70^2+82^2+101^2+\cdots+61^2+115^2}{5} - TCT - SCV - SCA$$

$$= 24259.6 - 22394.88 - 1735.25 - 8.24 = 121.23$$

$$SC(B*A) = \frac{79^2+87^2+86^2+\cdots+85^2+89^2}{5} - TCT - SCB - SCA$$

$$= 22418.4 - 22394.88 - 10.59 - 8.24 = 4.69$$

La suma de cuadrados de totales absolutos, se calcula partir de los datos de las tablas 9.14,9.15 y 9.16 de producción anual.

$$SCT = 15^2 + 16^2 + 14^2 + \cdots + 24^2 + 21^2 + 22^2 - TCT$$

$$= 24398 - 22394.88 = 2003.12$$

$$SC(B*V*A) = SCT - SC(MP) - SCA - SC(V*A) - SC(B*A)$$

$$= 2003.12 - 1779.79 - 8.24 - 121.23 - 4.69 = 89.17$$

Tabla 9.22 Análisis de varianza de producción de papa por tres años

F. de V.	Gl	SC	CM	F_c	5%	1%
Total variedad	**24**	**1779.79**				
Bloques(B)	4	10.59	2.6475			
Variedades(V)	4	1735.25	433.8125	207.2*	3.06	4.89
$Error_{(a)}$ (B*V)	16	33.95	2.1219			
Años(A)	2	8.24	4.12	1.76	3.15	5.39
(VxA)	8	121.23	15.15	5.44*	2.10	3.17
(BxA)	8	4.69	0.586	0.21	2.10	
$Error_{(b)}$(BxVxA)	32	89.17	2.787			
Total	**74**	**2003.12**				

Los valores F relevantes son: de variedades, años y variedades por años. En la tabla 9.22 del análisis de varianza de la producción de papa para los tres años, se puede notar que las variedades de papa muestran diferencias estadísticas significativas marcadas, lo que motiva a creer que es un factor del estudio preponderante y que a través de pruebas múltiples se puede determinar cuál de las variedades muestra mejor rendimiento. En cuanto al factor (BxA) el valor $F(BxA/BxVxA = 0.21)$ no muestra diferencias significativas, lo que infiere que existe ausencia de interacción del factor BxA.

En lo que respecta al factor $VxA = \frac{15.15}{2.787} = 5.44$, se puede concluir que existe efecto de la interacción de variedad por año. Mientras que no se observa un efecto del factor año en el experimento.

Ejercicios propuestos

1. Se llevó a cabo un experimento en la cual se estudia el rendimiento de 6 variedades de cebolla con potencial agroexportador. Se eligieron cinco regiones en forma aleatoria: Región 1, Región 2, región 3, Región 4 y Región 5. Los datos registrados en diseños de bloques completos al azar, se muestra a continuación.

LOCALIDAD: Región 1

Bloques	Variedades de cebolla(Tn/ha)					
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
I	18	15	20	14	13	21
II	19	14	21	11	10	23
III	20	13	23	13	8	25
IV	21	16	21	10	11	26
V	16	12	22	11	9	24

LOCALIDAD: Región 2

Bloques	Variedades de cebolla(Tn/ha)					
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
I	18	16	22	16	12	22
II	19	15	23	12	11	23
III	14	14	22	14	9	26
IV	16	15	24	11	13	28
V	12	11	25	13	10	24

LOCALIDAD: Región 3

Bloques	Variedades de cebolla(Tn/ha)					
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
I	13	16	22	13	12	22
II	15	12	20	10	11	20
III	21	11	22	11	9	23
IV	20	15	23	12	10	24
V	117	13	25	10	8	25

LOCALIDAD: Región 4

Bloques	Variedades de cebolla(Tn/ha)					
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
I	17	16	23	10	12	22
II	13	13	22	12	11	22
III	23	13	22	10	10	24
IV	22	12	24	12	12	23
V	18	13	25	13	10	21

LOCALIDAD: Región 5

Bloques	Variedades de cebolla(Tn/ha)					
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
I	16	17	22	15	12	20
II	18	13	22	13	12	22
III	22	15	22	12	9	24
IV	22	17	23	13	11	27
V	19	13	24	14	19	29

a) Realizar un análisis individual de las localidades, empleando un nivel con $\alpha = 0.05$.

b) Realizar un análisis combinado de todas las localidades.

c) ¿Existe interacción entre localidades y tratamiento?

2. En la región Tacna, se llevó a cabo un experimento de campo para probar las bondades de cuatro variedades de ají con fines de exportación. Los lugares escogidos para la experimentación, fueron cuatro sectores: Sector 1, Sector 2, Sector 3 y sector 4. Los datos registrados en Toneladas por hectárea, se presentan en la tabla que sigue:

Localidad: Sector 1

Bloques	Variedades(Tn/ha)			
	V_1	V_2	V_3	V_4
I	5	5.6	5.2	4.3
II	4	4.8	5.6	4.0
III	5.6	3.5	5.4	3.9
IV	3.2	6.1	5.3	4.5
V	4.1	5.3	5.6	4.7

Localidad: Sector 2

Bloques	Variedades(Tn/ha)			
	V_1	V_2	V_3	V_4
I	5	5.0	5.2	2.3
II	4	6.1	6.0	2.6
III	6.5	5.2	5.4	3.4
IV	3.2	4.8	5.3	2.8
V	4.0	4.7	4.9	3.1

Localidad: Sector 3

Bloques	Variedades(Tn/ha)			
	V_1	V_2	V_3	V_4
I	5.1	5.6	5.6	4.3
II	4.6	4.8	5.8	4.0
III	3.5	3.5	6.4	3.9
IV	4.0	6.1	5.3	4.5
V	4.1	6.2	5.6	4.3

Localidad: Sector 4

Bloques	Variedades(Tn/ha)			
	V_1	V_2	V_3	V_4
I	5	6.1	5.6	4.3
II	4	4.8	5.3	5.0
III	5.6	4.6	4.9	3.9
IV	3.2	4.7	5.4	4.5
V	3.3	4.8	5.2	4.1

Localidad: Sector 5

Bloques	Variedades(Tn/ha)			
	V_1	V_2	V_3	V_4
I	4.3	5.4	5.3	4.3
II	4.6	6.1	5.9	3.4
III	3.8	5.4	5.4	4.1
IV	3.7	4.3	5.2	4.2
V	3.9	4.4	5.5	4.4

a) Realizar un análisis individual de las localidades, empleando un nivel de significación con $\alpha = 0.05$.

b) Realizar un análisis combinado de todas las localidades.

c) ¿Existe interacción entre localidades y tratamiento?

3. Se llevó un experimento en Ají de exportación en un departamento del país. El experimento se dispuso bajo un diseño de bloques completo al azar con cinco variedades de Ají y cinco bloques, Los datos para tres años se presentan a continuación.

Producción de Ají Tn/ha , 1º año

Bloques	Variedades					Total Bloques
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
I	8	5	6	9	6	
II	7	6	8	10	8	
III	9	5	7	8	5	
IV	7	6	9	10	4	
V	7	5	8	9	6	
Total Tratamiento						

Producción de Ají Tn/ha , 2º año

Bloques	Variedades					Total Bloques
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
I	10	9	10	13	6	
II	9	7	12	13	5	
III	8	8	10	12	8	
IV	11	9	10	11	6	
V	10	9	12	10	7	
Total Tratamiento						

Producción de Ají Tn/ha , 3º año

Bloques	Variedades					Total Bloques
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
I	9	6	12	10	10	
II	7	8	10	10	11	
III	6	4	11	10	11	
IV	8	5	10	12	9	
V	7	7	11	12	10	
Total Tratamiento						

a) Realizar el análisis individual para cada año del experimento, elaborando un análisis de varianza para cada uno de ellos.
b) Elaborar una tabla de los resultados del análisis de varianza calculado en el paso (a).
c) Elaborar una tabla combinado de la producción total de ají para los tres años.
d) Elaborar el análisis combinado del experimento de producción de ají para los tres años y manifestar sus conclusiones respecto a las variedades, años, variedades por año y bloques por año.
e) Realizar la prueba de Comparaciones rangos múltiples de Duncan y manifestar que variedad de ají mostro mejor performance.

4. En un experimento conducido bajo un diseño de bloques completos al azar en ocho localidades del Perú, se probaron cinco niveles de fertilización nitrogenada en Vainita de exportación (Phaseolus vulgaris). Calcular los grados de libertad para todas las fuentes de variabilidad, si se emplean cuatro bloques por localidad.

5. Plantear un problema en el contexto de su carrera que deba ser realizado bajo un diseño de bloques al azar, en diferentes lugares y realizar el ANOVA y, si es el caso, realice la prueba de comparación de medias que desee.

CAPÍTULO X

HERRAMIENTAS NO PARAMÉTRICAS PARA INVESTIGACION

En la mayoría de los casos de investigaciones, estas se realizan teniendo a la mano datos que están referidos a valores representativos de poblaciones; es decir, parámetros de la población, como; medias, varianzas , proporciones, diferencias, etc. Sin embargo; una gran gama de investigaciones, en la actualidad, se realizan sin tener en consideración las distribuciones que estos valores cuantitativos representan, y no pueden aplicarse los *métodos paramétricos*. Por tanto, cuando se realizan investigaciones que contengan rangos u ordenamientos de datos por ejemplo, son adecuadas su aplicación a estos casos los métodos *no paramétricos*. Entre estos podemos citar el caso de las distribuciones libres y las rigurosamente no paramétricas

Así mismo, los métodos paramétricos se basan en el supuesto de que se conocen las distribuciones de las poblaciones. Inclusive sino se conocieran se suponen que estos tienen una distribución normal o se aproximan a una distribución normal, lo cual supone un riesgo en las conclusiones de la investigación. Recuerde que, cuando se procedió a realizar pruebas de hipótesis sobre medias, medianas, varianza, etc., abordados en el capítulo II, suponíamos de forma invariable que la distribución de la población, de la cual se extrae la muestra, era normal o aproximadamente normal. Sin embargo; existen otros métodos, usualmente llamados no paramétricos, que no requieren de este tipo de hipótesis sobre la distribución de los datos que resulten fáciles de implementar y pueden calcularse sin dificultades, incluso, con tamaño de muestras pequeñas**.** La filosofía de los métodos no paramétricos se basa en poblaciones con libre distribución, que no requieren determinar el patrón de distribución de la población.

Es necesario agregar que, la consideración de una distribución normal no se justifica plenamente. Para reemplazar las pruebas paramétricas tradicionales, se han desarrollado un sin número de pruebas estadísticas que implican un patrón de distribución desconocido. En estos casos, se deberá emplear procedimientos que incluyan los métodos no paramétricos siempre que se desconozca la distribución de la población o que se tenga dudas de su normalidad. Esto tampoco constituye una regla fija, puesto que no significa que estos métodos se prefieran en todas las circunstancias, ya que una prueba no paramétrica frecuentemente, proporciona resultados menos precisos. Por lo tanto, se develan debilidades frente a un método paramétrico. En consecuencia, un método no paramétrico se empleará en circunstancias en la que el investigador ha llegado a la conclusión después de un amplio análisis, de que no es aplicable una técnica paramétrica.

En la actualidad existen muchas técnicas no paramétricas, en este libro se describirán algunos de estos métodos que son los más utilizados y recomendados por los investigadores en la práctica. Así por ejemplo, los autores Pertegas Díaz y

Pita Fernández[16], presentan un resumen muy ilustrativo de los métodos no paramétricos, que presentamos en la tabla 10.1 que se observa a continuación.

Tabla 10.1 Descripción de pruebas no paramétricas

PRUEBA	TIPO DE VARIABLE	APLICACIÓN
Prueba $\times^2$ de independencia	Cualitativa	Esta prueba permite medir la significación de la asociación entre dos variables de clasificación.
Prueba $\times^2$ de homogeneidad	Cualitativa	Cuando se tienen varias muestras y se desea determinar si son homogéneas con relación a la distribución en las mismas de una variable cualitativa.
Prueba Kolmogorov-Smirnov	Cuantitativa	Es una prueba no paramétrica que se utiliza para diferencias entre distribuciones acumuladas, es, pues, una prueba de bondad de ajuste.
Prueba de la mediana	Cuantitativa	Esta prueba permite determinar si dos muestras independientes difieren con relación a sus medianas, o sea permite determinar si dos muestras independientes provienen de poblaciones con la misma mediana.
Prueba de signos	Cuantitativa	Esta prueba permite la comparación de la mediana de una serie de datos con un valor especificado. También permite indicar la existencia de tendencias.
Prueba de rangos y signos de Wilcoxon	Cuantitativa	Permite probar la aleatoriedad de una secuencia de datos. También

16 Unidad de epidemiología clínica y Bioestadística. Complejo hospitalario universitario de A Coruña(España)

		permite probar la simetría de una Distribución. Otra aplicación de esta prueba es comparar la distribución de una serie de datos con un valor especificado.
Prueba de la suma de rangos de Wilcoxon	Cuantitativa	Constituye la base para el resto de pruebas que utilizan rangos y permite determinar si dos muestras proceden de la misma distribución, las muestras deben de ser del mismo tamaño y no necesariamente independientes.
Prueba de U-Man Whitney	Cuantitativa	Esta prueba se utiliza para resolver el mismo caso que resuelve la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con muestras no necesariamente del mismo tamaño.
Prueba de Kruskal Wallis	Cuantitativa	Es una generalización de la prueba de suma de rangos de Wilcoxon, permitiendo comparar más de dos muestras con el propósito de conocer si proceden de la misma población o si hay diferencias entre las medidas de tendencia central de más de dos poblaciones.
Pruebas de aleatoriedad	cuantitativa	Es una prueba en la que se puede observar patrones de tendencia como: la mezcla, agrupamiento, oscilación y tendencia

A continuación desarrollamos algunos de los métodos señalados en la tabla 10.1, iniciando el estudio con los métodos más simples, a fin de que el lector pueda llegar a comprender el empleo de estas pruebas y el contexto en las cuales se maneja y su aplicación a casos particulares.

10.1 PRUEBAS DE CORRIDAS ALEATORIAS

Cuando se emprende un trabajo de investigación, con frecuencia surge la interrogante, ¿que si la muestra tomada de una población es aleatoria?. Si el proceso de toma de muestra se ajusta a los métodos convencionales de muestreo, respetando la independencia de cada elemento de la población, se puede afirmar con toda propiedad que la muestra es aleatoria, es decir, si se asignan códigos a cada elemento de la población empleando números aleatorios o cualquier forma de garantizar que cada elemento de la población puede ser seleccionado sin preferencias de ninguna naturaleza.

En series de valores, en el tiempo, la prueba de aleatoriedad puede mostrar hasta cuatro tipos de patrones no aleatorios.

1º Mezcla, cuando se aprecian demasiadas corridas arriba o debajo de la mediana
2º Agrupamiento, cuando se aprecian muy pocas corridas arriba o abajo de la mediana
3º Oscilación, cuando en el recorrido se aprecia demasiadas corridas arriba y abajo.
4º Tendencia, cuando se aprecian muy pocas corridas arriba y abajo

Para ilustrar la relevancia, de un proceso aleatorio, estudiaremos en esta sección, dos técnicas no paramétricas de aleatoriedad.

10.1.1 Corridas aleatorias por encima y por debajo de la mediana
Esta prueba consiste en observar si cada elemento que se ha recogido se encuentra por debajo y por encima de la mediana. Empleando símbolos para la serie, se van marcando los resultados. Si el valor observado es superior a la mediana lo marcamos como 1 y si es inferior a la mediana lo marcamos como 2.
Entonces, el número de valores de la serie, por encima y por debajo de la mediana es una variable aleatoria, puesto que vamos marcando los valores conforme y en el orden en que se recogen los mismos.
La hipótesis nula a probar dice, H_0: *Los datos son muestras aleatorias independientes de una población*. En esa razón, el estadístico *R,* se supone se distribuye en forma normal o aproximadamente normal cuando el valor de *n* es mayor o igual a 25.
Donde *R*, es el número de elementos de la serie aleatoria.

Con media $E(R) = \frac{(n+2)}{2}$ ec. 10.1

para $n \geq 25$

Y varianza de R, $V(R) = \frac{n(n-2)}{4(n-1)}$ ec. 10.2

En consecuencia el estadístico de prueba *Z*, es igual a:

$$Z = \frac{R-E(R)}{\sqrt{V(R)}}$$ ec. 10.3

La hipótesis de trabajo, es decir, la hipótesis alternativa, puede ser de tres clases:
Una prueba de extremo izquierdo, cuando existen evidencias que los datos son muy parecidos.
Una prueba de extremo derecho, cuando existen evidencias que los datos se ubican sistemáticamente hacia arriba y hacia abajo a partir de la mediana, de un dato a otro.

Una prueba de dos colas, cuando no se tiene evidencias claras de la distribución de los datos.

Ejemplo 10.1 Se han recogido datos de cuentas de ahorros de 30 estudiantes universitarios en una gran ciudad del Perú. Los datos están expresados en miles de soles. Se desea probar si la distribución de estos datos fueron registrados en forma aleatoria, debido a que existen evidencias que los padres destinan una cantidad muy similar a sus hijos. Usar un nivel de significación del 5%.

45	40	30	42	31	34	29	45	41	40	34
39	28	33	44	31	37	27	41	38	35	36
23	26	47	41	20	22	33	40			

En primer término debemos calcular la mediana, por debajo de cuyo valor se encuentran la mitad de los datos y por encima la otra mitad, y construir la serie.

La mediana es, 35.5 que resulta de, $\frac{(35+36)}{2}$ =35.5
Construimos la serie: la serie consiste en representar con *1* los valores que sean mayores que la mediana y con *2* si son menores

11- 2- 1- 222- 111- 2- 1- 22- 1- 2- 1- 2- 11- 2- 1- 22- 11- 222- 1

$$R = 19$$

Hipótesis:

H_0: Los datos son aleatorios
H_1: Los datos no son aleatorios

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

Calcular el estadístico *Z*, mediante: $Z = \frac{R-E(R)}{\sqrt{V(R)}}$,

De acuerdo con la ec. 10.1 el valor esperado de *R* es:

$$E(R) = \frac{n+2}{2} = \frac{30+2}{2} = 16 \text{ y}$$

la varianza: $V(R) = \frac{n(n-2)}{4(n-1)} = \frac{30(30-2)}{4(30-1)} = \frac{840}{124} = 6.774$

$$d.e. = \sqrt{6.774} = 2.6$$

Entonces: $$Z = \frac{19-16}{\sqrt{6.774}} = 1.153$$

La regla de decisión, debe plantear, que si Z calculado es menor que Z de la tabla se debe rechazar la hipótesis nula H_0

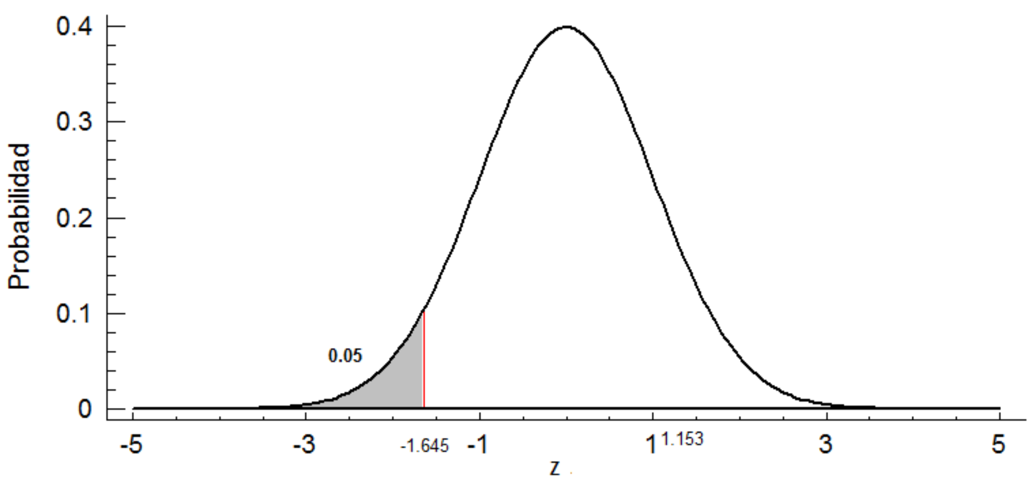
Para el nivel de significación del 5% el valor de $Z = -1.645$

Puesto que el valor de Z calculado se encuentra en la zona de aceptación, no se rechaza la hipótesis nula para un nivel de significación del 5%, lo que significa que los valores recogidos de la muestra se hizo en forma aleatoria e independiente.
En la fig. 10.1 se ilustra la prueba en la cual puede apreciarse que el valor de z calculado 1.153 está en la zona de aceptación, por lo que se toma la decisión de aceptar la hipótesis nula, lo que ratifica la conclusión a la que arribamos en el procedimiento analítico de la corrida aleatoria.

10.1.2 Corridas aleatorias arriba y abajo

Es una prueba similar al anterior, consiste en observar los datos e ir colocando uno a uno signo (+) o (–) entre las observaciones sucesivas, de acuerdo a si el último valor es mayor o menor que el inmediato anterior.
Por consiguiente, cada signo (+) o (–) se cuenta como una serie, incluidas las repetidas.

Fig. 10.1 Pruebas de aleatoriedad



Empleando los mismos datos del ejemplo 10.1, construimos la serie:

- - + - + - + - - - + - ++ - + - + - - + - ++ - - +++

$$R = 20$$

La hipótesis se plantea similar al método anterior, en este caso el valor de R se distribuye en forma normal o aproximadamente normal, con media

$$E(R) = \frac{2n-1}{3} \qquad \text{ec. 10.4}$$

Para $n \geq 30$

Y varianza $$V(R) = \frac{16n-29}{90} \qquad \text{ec. 10.5}$$

Entonces el estadístico *Z*, se calcula mediante: $Z = \frac{R-E(R)}{\sqrt{V(R)}}$
La hipótesis nula: H_0: *Los datos son independientes y aleatorios*
La hipótesis alternativa: H_1: *Los datos son muy semejantes*
Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

Con los datos del ejemplo 10.1, y empleando la ec. 10.4 y 10.5, se tiene:

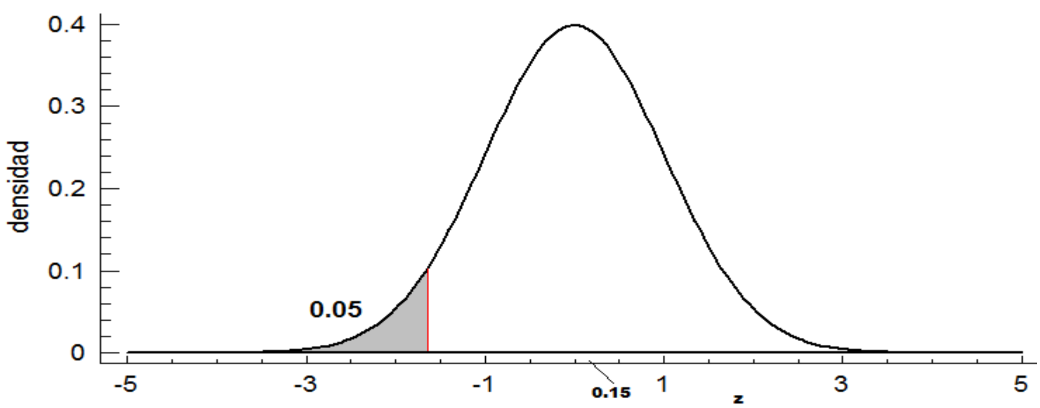
$$E(R) = \frac{2(30)-1}{3} = 19.667$$

$$V(R) = \frac{16(30)-29}{90} = 5.011$$

$$Z = \frac{20-19.667}{\sqrt{5.011}} = 0.15$$

Comparemos el valor de *Z* calculado igual a 0.15 con el valor de z para un nivel de significación de *0.05*, con la zona crítica en el extremo inferior igual a -1.645, el valor de *Z* es mayor que el valor crítico, por tanto, cayendo en la zona de aceptación, se acepta la hipótesis nula sobre la aleatoriedad de la muestra extraída de la población, lo que significa que la prueba proporciona evidencias, que los datos recogidos son aleatorios.
En la fig. 10.2 se ilustra la prueba en la que el valor calculado de Z se ubica en la zona de aceptación, por tanto no se rechaza la hipótesis nula, en consecuencia, se considera que los datos son aleatorios.

Fig. 10.2 Prueba aleatoria arriba y abajo



10.1.3 Uso de un software estadístico

Afortunadamente, las pruebas usadas en este acápite pueden ser tratadas mediante la utilización de un software estadístico, lo que hace más simple y facilita su aplicación. Existen varios programas que incluyen estas pruebas de las corridas aleatorias. Para ilustrar su empleo, haremos uso del Statgraphics Centurion que están contenidos en los menús *Medir y Pronósticos*. Particularmente, para realizar el análisis, seguimos la siguiente secuencia: $Medir \rightarrow Gráficos\ de\ series\ de\ tiempo \rightarrow Gráfico\ corridas \rightarrow Para\ individuos,$ entonces se ingresa la variable a analizar en la ventana de diálogo, la que previamente fue ingresada en la hoja de datos. El resultado que se obtiene es la que se observa a continuación:

Gráfico de Secuencias (Individuales) – ahorros

Datos/Variable: ahorros

30 valores con rango desde 20,0 a 47,0

Mediana = 35,5

Prueba	*Observados*	*Esperados*	*Más Largo*	*P(>=)*	*P(<=)*
Corridas arriba y abajo de la mediana	19	16,0	3	0,176436	0,90331
Corridas arriba y abajo	20	19,6667	3	0,529678	0,645154

El StatAdvisor

Este procedimiento se usa para examinar los datos en busca de tendencias u otros patrones en el tiempo.

Los valores-P se usan para determinar si los patrones aparentes son estadísticamente significativos. Puesto que ninguno de los valores-P es menor que 0,025, estos patrones no aleatorios no son significativos con un nivel de confianza del 95%.

Para la prueba de hipótesis propiamente, se usa el menú Pronósticos siguiendo la siguiente secuencia: $Pronósticos \rightarrow Métodos\ de\ series\ de\ tiempo\ descriptivo$, en el cuadro de diálogo, métodos descriptivos, se captura la variable, para nuestro ejemplo ahorros, y se aplica obteniendo el siguiente resultado:

Prueba de Aleatoriedad de ahorros

(1) Corridas arriba o abajo de la mediana

Mediana = 35,5

Número de corridas arriba o abajo de la mediana = 19

Número esperado de corridas = 16,0

Estadístico z para muestras grandes = 0,929029

Valor-P = 0,352872

(2) Corridas arriba y abajo

Número de corridas arriba y abajo = 20

Número esperado de corridas = 19,6667

Estadístico z para muestras grandes = -0,0744529

Valor-P = 1,0

El StatAdvisor
Se han realizado dos pruebas para determinar si **ahorros** es una secuencia aleatoria de números, o no. Una serie de tiempo de números aleatorios a menudo es llamada ruido blanco ya que contiene una contribución igual a varias frecuencias. La primera prueba cuenta el número de veces que la secuencia estuvo arriba o abajo de la mediana. El número de tales corridas es igual a 19, comparado con un valor esperado de 16,0 si la secuencia fuera aleatoria. Puesto que el valor-P para esta prueba es mayor o igual que 0,05, no se puede rechazar la hipótesis de que la serie es aleatoria, con un nivel de confianza del 95,0% o mayor.
La segunda prueba cuenta el número de veces que la secuencia ascendió o descendió. El número de tales corridas es igual a 20, comparado con un valor esperado de 19,6667 si la secuencia fuera aleatoria. Puesto que el valor-P para esta prueba es mayor o igual que 0,05, no se puede rechazar la hipótesis de que la serie es aleatoria, con un nivel de confianza del 95,0% o mayor.

Ejercicios 10.1 Corridas aleatorias

1. Un grupo de deportistas de una universidad que deben concurrir a una olimpiada nacional se les registra sus pesos, en Kilogramos, a fin de asegurar que se encuentran aptos para las competencias. Realizar una prueba de aleatoriedad para probar que los datos fueron recogidos en forma aleatoria uno después del otro. Usar un nivel de significación del 5% para la prueba, por encima y por debajo de la mediana.

   69 72 85 96 54 58 76 61 63 60 75 84 80 83 67 94 90 92 84 76 64 53 59 60 75 69 58 71 52 84 93

2. Se ha seleccionado en forma aleatoria los ingresos semanales que alcanzan 30 profesionales de derecho que realizan consultoría privada. Se desea probar si la selección de tales profesionales se realizó sin tener preferencias unos sobre otros. Usando un $\alpha = 0.05$, probar la hipótesis nula, si la

selección de las personas se realizó en forma aleatoria, mediante el método por encima y por debajo de la mediana.

1600	1700	1000	1100	800	730	950	820	1140	1250
1340	1600	1264	852	940	1587	1306	1502	960	940
820	970	980	1000	1100	1430	1760	1630	780	920

3. Respecto a la pregunta 1 realizar la prueba de aleatoriedad, empleando el método arriba y abajo, con un $\alpha = 0.01$.

4. Respecto a la pregunta 2 realizar la prueba de aleatoriedad, empleando el método arriba y abajo, con un $\alpha = 0.10$.

5. Se ha registrado las ventas mensuales de un producto agrícola en una región del país. Los datos son:

mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Ventas(miles)	45	56	23	35	65	45	75	69	84	52	66	65	64	48

Realizar una prueba de aleatoriedad a fin de determinar si los datos de la serie son aleatorios, usando un nivel de significación del 10%

6. En un negocio particular se ha recogido datos de sus entregas realizadas en forma semanal. Los datos se presentan en la tabla que sigue

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Unidades	90	110	80	110	96	100	125	115	130	102	101	106	98	80	135

Realizar la prueba de aleatoriedad y determinar si los datos de la serie semanal son aleatorios con un nivel del 5% de significación.

10.2 PRUEBA DEL SIGNO

En los métodos paramétricos en la cual se emplea la distribución t de pequeñas muestras, cuando el propósito es determinar si dos medias poblaciones provienen de poblaciones iguales, se considera que cada una de las poblaciones es normal o aproximadamente normal y que las varianzas de las mismas son idénticas. Esta suposición no siempre es cierta, y por lo tanto, no puede emplearse la prueba t. En este caso la hipótesis inicialmente planteada de que las medias son iguales, $\mu_1 = \mu_2$, cambia en su formulación de que las dos poblaciones tienen distribuciones iguales. Observe que las dos hipótesis que en apariencia son iguales no lo son, ya que ambas pueden tener distribuciones diferentes pero con medias iguales. Precisamente, para probar si dos poblaciones tienen distribuciones iguales, se utiliza el procedimiento no paramétrico, que se conoce como la prueba del signo.

10.2.1 Prueba del Signo, libre de la magnitud de la diferencia

Por ejemplo, suponer que una investigación tiene dos variables aleatorias, en la cual se suponen que las distribuciones de la población de A y la población de B son iguales. Entonces para proceder a la prueba de hipótesis, se extraen dos muestras del mismo tamaño de ambas poblaciones. Las observaciones extraídas de las poblaciones pueden ser administradas por pares, similar a las pruebas t de muestras dependientes. Esta prueba se basa en los signos, negativos o positivos, de los diferentes pares de datos, despreciando la magnitud de las diferencias, constituyendo un sustituto conveniente a la prueba t de muestras pareadas. Inclusive, en pruebas que impliquen muestras independientes, puede utilizarse también la prueba del signo.

De las comparaciones entre las dos muestras emparejadas se debe observar como un dato relevante el número de veces que aparece el signo menos frecuente que lo representamos por S que sigue una distribución binomial con $p = 0.5$, el mismo que representa el estadístico de comparación con el valor crítico *K*,

$$K = \frac{(n-1)}{2} - (0.98)(\sqrt{n}) \qquad \text{ec. 10.6}$$

n, es el número de signos que aparecen en las comparaciones de los tratamientos, sin contar los ceros que puede presentarse cuando los valores de las comparaciones son iguales.

La hipótesis nula a plantearse indica que ambos tratamientos o población son iguales o idénticos en su distribución ($A = B$), frente a una hipótesis alternativa que son diferentes.

Si el signo menos frecuente es (-) significará que el tratamiento *A* es mejor que el *B*, si el menos frecuente es *(+)* significa que *B* es mejor que *A*.

Finalmente si $S \leq K$, la hipótesis nula de medias iguales se rechaza. Siendo S el signo menos frecuente.

Ejemplo 10.2 Se ha registrado las unidades producidas por trabajadores de una empresa de manufactura empleando métodos de operación diferentes. Para este propósito se escoge a 40 trabajadores divididos en dos grupos de 20 con similar experiencia y se anotan sus rendimientos por hora de trabajo para los métodos *A* y *B* y que aparecen en la tabla 10.2.

Tabla 10.2 Rendimiento de trabajadores para la prueba del signo

Par de trabajadores	Método A	Método B	Signo
1	16	17	-
2	17	16	+
3	20	18	+
4	21	20	+
5	15	25	-
6	14	24	-
7	18	14	+

8	19	18	+
9	21	24	-
10	22	28	-
11	24	26	-
12	30	21	+
13	18	14	+
14	17	18	-
15	21	19	+
16	24	20	+
17	26	23	+
18	27	21	+
19	25	17	+
20	20	16	+

El signo menos frecuente es (-) entonces $S = 7$, $n = 20$

Vamos a realizar la prueba del signo, para un nivel de 0.05 de significación

Se plantea las hipótesis:

$$H_0: la\ distribución\ del\ método\ A = a\ la\ del\ método\ B$$

$$H_1: la\ distribución\ del\ método\ A \neq a\ la\ del\ método\ B$$

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$, es una prueba de dos colas, por tanto, 0.025 se distribuye a ambos lados de la cola.

Calculamos K, mediante la ec. 10.6:

$$K = \frac{(20-1)}{2} - (0.98)(\sqrt{20}) = 5.12$$

Dado que $S = 7$ y $K = 5.12$

Comparando ambos valores, resulta que S es mayor que K, por tanto no se rechaza la hipótesis nula, en consecuencia se puede concluir que las distribuciones de los tratamientos $A\ y\ B$ son similares.
Podemos realizar otro procedimiento para probar la igualdad de tratamientos, calculando la probabilidad de hallar un valor menor o igual a S, mediante la distribución binomial. Si la probabilidad resulta menor que $\alpha/2$ se rechaza igualmente la hipótesis nula.

$$P(S \leq 7) = \sum_{s=0}^{7} b(s; n = 20, p = 0.5) = 0.1315879$$

Para el ejemplo que venimos desarrollando, la probabilidad calculada resulta mayor que 0.025, lo que hace que la hipótesis nula no sea rechazada
Así mismo, para el ejemplo que se ha resuelto, mediante la binomial, puede también obtenerse un resultado satisfactorio empleando la aproximación normal a la binomial, mediante una corrección de continuidad. Dado que en el ejemplo,

$np = 20(0.5) = 10.$ Por tanto, se puede plantear la probabilidad de encontrar un valor de S menor o igual a 7 como se plantea a continuación:

$$P(S \leq 7) = P(Z \leq \frac{7+0.5-10}{\sqrt{20(0.5)(0.5)}}) = P(Z \leq -1.12) = 1 - P(Z < 1.12) = 0.1314$$

La que resulta mayor que 0.025 y concuerda con la probabilidad que se calculó en el paso anterior de no rechazar la hipótesis nula.
Se recomienda emprender la prueba del signo cuando el tamaño de n es suficientemente grande, para garantizar la validez de la ecuación 10.6, si n es pequeña, debe usarse la distribución binomial exacta.

10.2.2 Prueba del Signo y Calificaciones de Wilcoxon
En el método anterior, solamente se estudió el signo de las diferencias entre las parejas, sin embargo, no es del tanto recomendable dejar de lado las magnitudes de las diferencias entre las parejas de observaciones. Por ello, se desarrolló la prueba de rangos con signo, o de Wilcoxon. Este prueba sugiere poner por rango todas las magnitudes de las diferencias absolutas entre los pares de valores, de menor a mayor. Esta prueba se recomienda emprender cuando algunas suposiciones de la prueba paramétrica t son violadas. En este caso los supuestos necesarios para realizarlo son:

-La distribución de la población de las diferencias de las magnitudes son aproximadamente simétricas
-Que cada una de las mediciones constituyen una muestra aleatoria de n elementos.
-La variable de interés para el estudio es de naturaleza continua.
-Los datos recogidos o registrados para la prueba son medidos a una escala de intervalo o cociente.

De los n pares de datos, se observan primero sus diferencias, simbólicamente representado por d_i, luego se clasifican esas diferencias de acuerdo con su magnitud absoluta. Así, a la menor magnitud absoluta se le asigna el rango 1, a la siguiente menor el rango 2 y así sucesivamente, hasta la última magnitud que debe ser igual a n'. Las diferencias igual a cero se desechan, cuando existen magnitudes iguales, el rango que debe asignarse es el promedio de rangos de los lugares que ocupan, por ejemplo, si dos magnitudes ocupan el lugar 4 y 5 se promedian los rangos, 4 y 5, lo que resulta 4.5, asignado a cada rango este valor.

Finalmente se calcula el valor de la variable aleatoria T, sumando las diferencias absolutas con signos positivos (+), por un lado y por otro las diferencias absolutas con signos negativos (-). En cuanto al valor de la estadística T, puede considerarse el valor absoluto de la suma positiva o el valor absoluto de la suma negativa, y la prueba puede ser de uno o dos extremos, dependiendo del valor de las diferencias. En consecuencia el valor de la estadística de Wilcoxon es:

$$W = \sum_{i=1}^{n\prime} R^{(+ó-)} \qquad \text{ec 10.7}$$

Este valor se debe comparar con el valor de Tabla de Wilcoxon anexo *G*. Si se considera el menor valor absoluto este debe compararse con el valor inferior de la tabla. Si por el contrario se considera el mayor valor absoluto, la comparación debe hacerse con el límite superior de la mencionada tabla.
Si el tamaño de la muestra es igual o superior a 16, se considera que tiene una aproximación normal, por tanto puede emplearse la siguiente expresión como valor crítico:

$$W_c = Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{\frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{24}}\right) + \frac{n'(n'+1)}{4} - 1/2 \qquad \text{ec. 10.8}$$

La regla de decisión es: Si $W \geq W_C$ o $W \leq W_C$ la hipótesis nula debe rechazarse

Cuando el número de pares significativos o n' es mayor que 16, la distribución de la estadística W se aproximará a una distribución normal, cuya media es:

$$E(W) = \frac{n'(n'+1)}{4} \qquad \text{ec. 10.9}$$

$$\text{y} \quad V(W) = \frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{24} \qquad \text{ec. 10.10}$$

Por tanto, el valor de Z se calcula de la siguiente forma:

$$Z = \frac{W - E(W)}{\sqrt{\frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{24}}} \qquad \text{ec. 10.11}$$

Para un mejor proceder, el cálculo de Z debe realizarse mediante una corrección de continuidad como se puede apreciar seguidamente

$$Z = \frac{W \pm 0.5 - E(W)}{\sqrt{\frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{24}}}$$

La hipótesis nula a plantear es, que las dos funciones son idénticas y del mismo modo, si la hipótesis nula es cierta, cada uno de los conjuntos de calificaciones con signos tiene la misma posibilidad de ocurrir.

Para ilustrar el método, haremos uso de los datos del ejemplo 10.2, en la que se prueban las hipótesis*:*

H_0: *La distribución de A es idéntica a la distribución de B*

H_1: *A y B son diferentes*

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

En la tabla 10.3 se muestra además de los datos originales, la diferencia entre las magnitudes con los signos que les corresponde. Así mismo, de acuerdo al lugar que ocupan las diferencias y en las dos últimas columnas se presentan los rangos con signos positivos y negativos. Observe la diferencia -1 para el primer par, 1 para el segundo, 1 para el cuarto, 1 para el octavo par y -1 para el 14° par. A todas estas diferencias les corresponde los rangos del 1º al 5º. A cada uno se le asigna el rango 3 que resulta del promedio del 1 al 5$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15/3 = 5)$.
Así mismo, proporcionamos la suma de los rangos negativos -77 y la suma de los rangos positivos 133.

Tabla 10.3 Rendimiento de trabajadores para
la prueba de Rango de signos

Par de trabajadores	Método A	Método B	Signo	Rango	d_i	
					Rango negativo	Rango positivo
1	16	17	-1	3	-3	
2	17	16	1	3		3
3	20	18	2	7		7
4	21	20	1	3		3
5	15	25	-10	19.5	-19.5	
6	14	24	-10	19.5	-19.5	
7	18	14	4	12.5		12.5
8	19	18	1	3		3
9	21	24	-3	9.5	-9.5	
10	22	28	-6	15.5	-15.5	
11	24	26	-2	7	-7	
12	30	21	9	18		18
13	18	14	4	12.5		12.5
14	17	18	-1	3	-3	
15	21	19	2	7		7
16	24	20	4	12.5		12.5
17	26	23	3	9.5		9.5
18	27	21	6	15.5		15.5
19	25	17	8	17		17
20	20	16	4	12.5		12.5
					-77	133

Debemos tener claro que la hipótesis nula manifiesta que ambos métodos son igualmente efectivos, esperando que el método A sea igual al método B. La hipótesis alternativa nos dice que son diferentes.

Solución del caso:
1º Consideremos el valor de $W = 133$, es la suma de los rangos de las diferencias absolutas positivas, en consecuencia debemos comparar con el valor crítico de la tabla de Wilcoxon para n igual a 20, con un nivel de significación $\alpha = 0.05$. Si la prueba es de dos colas el valor de $W_C = 158$.

De acuerdo a la regla de decisión: $W = 133 < W_C = 158$, por tanto no se rechaza la hipótesis nula, significando que no hay evidencia para afirmar que existen diferencias significativas entre los métodos de operación consideradas en el experimento.

2º Vamos a resolver el caso teniendo en consideración que el tamaño de n es mayor que 16, es decir $n \geq 16$ en consecuencia la distribución de W es aproximadamente normal.

Con media: $E(W) = \frac{n'(n'+1)}{4}$ y varianza: $V(T) = \frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{24}$

Se rechazará la Hipótesis nula $H_0: si \quad Z \geq 1.96 \;\; o \;\; Z \leq -1.96$

Así, con los datos de la tabla 10.3 tenemos:

$$E(W) = \frac{19.5(19.5+1)}{4} = 99.94$$

$$V(W) = \frac{19.5(19.5+1)(2*19.5+1)}{24} = 666.25$$

Usamos $W = 133$

$$z = \frac{133-0.5-99.94}{\sqrt{666.25}} = 1.26$$

Entonces la $P(T \geq 133) = P(Z \geq 1.26) = 0.1038$

Como se puede notar, comparando la probabilidad calculada de 0.1038, resulta significativamente mayor que $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, por tanto no se rechaza H_0
Puede compararse del mismo modo, el valor de $Z = 1.26$ que resulta menor que $Z = 1.96$ de la tabla, lo que ratifica los resultados anteriores. En la fig. 10.3, se puede observar que el valor de z calculado igual a 1.26, está en la zona de aceptación o no rechazo.

10.2.3 Uso de un Software Informático

Como en el caso de las pruebas de aleatoriedad, el programa Statgraphics Centurión, proporciona un menú que permite la solución de la prueba mediante el uso de la informática como una herramienta que facilita el procedimiento, así como reduce el tiempo de operación.

La secuencia es la siguiente: $Analizar \rightarrow Comparación\ de\ dos\ muestras \rightarrow Muestras\ pareadas$,luego en el cuadro de diálogo se capturan las variables correspondientes (Método A y Método B) y se aplica, obteniendo el resultado tanto para la prueba de signos sin la magnitud de la diferencia y la prueba de rangos de signos de Wilcoxon , tal como se aprecia a continuación:

Prueba de Hipótesis para Método A-Método B

Media Muestral = 0,8

Mediana Muestral = 1,5

Desviación Estándar de la Muestra = 5,14628

Prueba de los signos

Hipótesis Nula: mediana = 0,0

Alternativa: no igual

Número de valores menores a la mediana hipotética: 7

Número de valores mayores a la mediana hipotética: 13

Estadístico para Grandes Muestras = 1,11803 (aplicada la corrección por continuidad)

Valor-P = 0,263551

No se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0,05.

Prueba de rangos con signo de Wilcoxon

Hipótesis Nula: mediana = 0,0

Alternativa: no igual

Rango medio de valores menores a la mediana hipotética: 11,0

Rango medio de valores mayores a la mediana hipotética: 10,2308

Estadístico para Grandes Muestras = 1,02997 (aplicada la corrección por continuidad)

Valor-P = 0,303021

No se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0,05.

El StatAdvisor

Esta ventana muestra los resultados de las pruebas relativas a la población de la cual procede la muestra de Método A-Método B.La prueba de los signos evalúa la hipótesis de que la mediana de Método A-Método B es igual a 0,0 versus la hipótesis alterna de que la mediana Método A-Método B es no igual a 0,0. Se basa en contar el número de valores arriba y abajo de la mediana hipotética. Debido a que el valor-P para esta prueba es mayor o igual a 0,05, no se puede rechazar la hipótesis nula, con un nivel de confianza del 95,0% .

La prueba de rangos con signo de Wilcoxon evalúa la hipótesis nula de que la mediana de Método A-Método B es igual a 0,0 versus la hipótesis alterna de que la mediana Método A-Método B es no igual a 0,0. Se basa en comparar los rankeos promedio de los valores arriba y abajo de la mediana hipotética. Debido a que el valor-P para esta prueba es mayor o igual a 0,05, no se puede rechazar la hipótesis nula, con un nivel de confianza del 95,0% de confianza. La prueba del signo y la del signo con rango son menos sensibles a la presencia de valores aberrantes pero son un tanto menos potentes que la prueba-t si todos los datos provienen de la misma distribución normal.

Ejercicios 10.2 calificaciones de Wilcoxon

1. Se evalúo el desempeño de dos profesores que imparten la misma asignatura. Para el experimento se eligió a 25 alumnos de matemática afín de comparar el rendimiento individual de cada uno de ellos. Los datos se presentan en la tabla siguiente:

Prof 1	90 80	87 87	86 89	94 87	92 85	97 90	93 95	95 93	97 91	89 90	88 92	94 87	89
Prof 2	85 84	87 87	94 91	96 90	89 86	87 81	79 85	89 90	92 88	87 91	82 87	75 94	88

Plantear las hipótesis y emplear la prueba de rangos de Wilcoxon y responder si las distribuciones de las calificaciones de rendimiento de los alumnos del curso de matemática proveniente de distintos profesores son iguales.

2. Se realizó un estudio de los salarios de trabajadores de pequeñas empresas en el sur del país. Para efectuar el experimento se escogió dos ciudades cercanas y se indagó respecto a los salarios promedios que las pequeñas empresas retribuyen a sus trabajadores. Los salarios en nuevos soles están a continuación:

Ciudad A	450	400	620	400	420	500	430	440	400	510	560	456	513	456	478	540
Ciudad B	620	450	423	416	520	541	532	534	521	486	409	461	439	560	423	543

a) Plantear las hipótesis adecuadas y
b) ¿Las distribuciones de los salarios son idénticas en $\alpha = 0.01$?

3. En un experimento de campo se probó dos dosis de abono orgánico en el cultivo del tomate, para cuyo efecto se evaluaron 16 parcelas. Los rendimientos en toneladas por hectárea a continuación.

Par de Parcelas	Dosis I	Dosis II
1	12	16
2	13	20
3	14	14
4	10	15
5	12	20
6	11	21
7	15	14
8	16	17
9	14	18
10	10	16
11	13	13
12	12	14
13	12	14
14	14	23
15	14	14
16	15	16

a) Plantear las hipótesis nula y alternativa adecuadas
b) Probar si las distribuciones son idénticas para un nivel de significación de 5%, empleando las prueba de rangos de Wilcoxon
c) Manifiesta sus conclusiones respecto a las hipótesis.

4. En un predio agrícola se probaron dos variedades de Espárrago blanco con semillas certificadas, los rendimientos en toneladas por hectárea son los siguientes:

Par de parcelas	Variedad I	Variedad II
1	8	4
2	7	5
3	5	8
4	4	7
5	8	2
6	6	9
7	7	6
8	5	8
9	5	7
10	4	5

a) Plantear las hipótesis nula y alternativa adecuadas
b) Probar si las distribuciones son idénticas para un nivel de significación
de 5%, empleando las prueba de rangos de Wilcoxon
c) Manifieste sus conclusiones respecto a las hipótesis nula y alternativa.

10.3 PRUEBA DE CORRELACIÓN DE RANGOS

Existe en la literatura especializada varios métodos de correlación de rangos. En este capítulo vamos a tratar el método de Correlación de rango de Spearman, en honor al reputado Psicólogo Inglés, Charles Edward Spearman, por sus importantes aportes a la Psicología y la Estadística.

Esta prueba se basa en el coeficiente de correlación de Spearman, ρ (rho). Es un estadístico que indica el grado de correlación lineal entre dos variables aleatorias continuas y es ampliamente usado en experimentos en la cual no se requiere consideraciones acerca de la distribución de la población de interés. Para calcular ρ, los datos son ordenados y reemplazados por su respectivo orden. Este valor varía desde -1 hasta +1 y además tiene la ventaja de evitar complicados cálculos numéricos para obtener su valor. Para proceder a aplicar el método, las observaciones se toman por pares, por ejemplo, las puntuaciones que otorgan dos jueces a un producto lácteo en un concurso nacional de cata. Como primer paso, los valores de las calificaciones para cada una de las dos muestras o productos, se clasifican por rangos, asignando a la puntuación más baja el *1,* a la siguiente el *2* y así sucesivamente. El método requiere de todos modos el cálculo de la suma de las diferencias entre los rangos correspondientes, elevados al cuadrado. Seguidamente, definimos R , el coeficiente de Spearman de la siguiente manera.

$$R = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2-1)} \qquad \text{ec. 10.12}$$

Donde: D es la diferencia entre los pares de rangos, n es el número de pares en la muestra y R el coeficiente de correlación de rangos.

De la ecuación se puede denotar que R se encuentra entre -1 y +1. En condiciones ideales la diferencia de los rangos debería ser igual a cero, mientras que R ser igual a 1. Así mismo, si las puntuaciones de los rangos de un conjunto fueran exactamente opuestos a la del otro, puede afirmarse entonces, que el coeficiente de Spearman R sería igual a -1. La ausencia de relación entre los dos conjuntos de datos, proporciona un $R = 0$.

Es relevante hacer notar al lector que la ec. 10.12, se deriva del supuesto de que no existe relación entre los datos de los dos conjuntos. Si por el contrario existieran vínculos, se asigna puntuaciones promedios a los conjuntos de datos que están vinculados. Si no existieran vínculos en las puntuaciones, se puede obtener la distribución exacta de R mediante muestreo para tamaños de n pequeños. En cambio, si el valor de n es suficientemente grande se puede probar la hipótesis nula mediante, $H_0: \rho = 0$, contra la hipótesis alternativa apropiada, pudiéndose emplear la ecuación 10.13 que se muestra a continuación

$$T = \frac{R.\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}} \qquad \text{ec. 10.13}$$

La misma que se distribuye aproximadamente como una distribución *t* de student, con $n-2$ grados de libertad.

Si *n* es pequeña, puede seguir usándose la prueba *t* con resultados satisfactorios, siempre que se haga una corrección de continuidad para *R*, mediante

$$\bar{R} = \frac{\sum d^2}{\left(\frac{1}{6}\right)[n(n^2-1)]+1} \qquad \text{ec. 10.14}$$

Para un valor de *T* igual a

$$T = \frac{\bar{R}.\sqrt{n-1}}{\sqrt{1-\bar{R}^2}} \qquad \text{ec. 10.15}$$

Que se distribuye aproximadamente como *t* con $n-2$ grados de libertad.

Ejemplo 10.3 Se realiza un estudio para averiguar el desempeño de los estudiantes de una universidad local de gran prestigio, en la asignatura de Matemática y su correlación con la asignatura de Economía. Se seleccionó una muestra aleatoria de 22 estudiantes del tercer año que se encuentran matriculados en ambas asignaturas. Las puntuaciones alcanzadas en las asignaturas se muestran en la tabla 10.4

a) Calcular el coeficiente de correlación de rango de Spearman
b) Realizar la prueba de hipótesis que la correlación en la población es cero vs la alternativa que es diferente de cero, con un nivel de significación de $\alpha = 0.05$

Solución
En la tabla 10.4, se puede observar las calificaciones de los alumnos seleccionados en ambas asignaturas, así como sus rangos que les corresponde. En la penúltima columna están las diferencias entre pares de rangos y en la última los cuadrados correspondientes. Vamos sustituir la suma en la ec. 10.12

Tabla 10.4 Correlación de rangos de Spearman para
las puntuaciones de Matemática y Economía

Estudiante	Puntos matemática		Puntos economía			
	Puntos	Rango	Punto	Rango	*D*	D^2
1	16	20.5	12	8	12.5	156.25
2	15	17.5	14	14.5	3	9

3	17	22	16	18.5	3.5	12.25
4	12	5.5	13	11	-5.5	30.25
5	14	12.5	17	20	-7.5	56.25
6	13	8	10	3	5	25
7	11	4	11	5.5	-1.5	2.25
8	15	17.5	11	5.5	12	144
9	14	12.5	12	8	4.5	20.25
10	12	5.5	13	11	-5.5	30.25
11	13	8	14	14.5	-6.5	42.25
12	14	12.5	15	17	-4.5	20.25
13	10	3	10	3	0	0
14	15	17.5	9	1	16.5	272.25
15	14	12.5	14	14.5	-2	4
16	16	20.5	18	21	-0.5	0.25
17	13	8	19	22	-14	196
18	14	12.5	12	8	4.5	20.25
19	9	2	16	18.5	-16.5	272.25
20	8	1	13	11	-10	100
21	14	12.5	14	14.5	-2	4
22	15	17.5	10	3	14.5	210.25
						1627.5

$$R = 1 - \frac{6(1627.5)}{22(22^2-1)} = 1 - \frac{9765}{9240} = 1 - 0.92 = 0.08$$

Las hipótesis en competencia son:

$H_0: \rho = 0$
$H_1: \rho \neq 0$

Se trata de una prueba de dos colas, por tanto el valor de $\alpha = 0.05$, se divide a ambos lados de la curva *t,* repartiéndo*se 0.025* para ambos extremos
La regla de decisión se plantea como:

$$Si\ T \geq t_{(0.025,20)}\ o\ \ T \leq -t_{(0.025,20)}$$ se rechazará la hipótesis nula

El valor de *T* se calcula mediante 10.13

$$T = \frac{0.08(\sqrt{22-2})}{\sqrt{1-0.08^2}} = 0.3589$$

De la tabla de la distribución de Student, el valor de $t_{20} = \pm 2.53$

Del resultado se concluye que debido a que el valor de $T = 0.3589$ es menor que $t = 2.53$, no se rechaza la hipótesis nula, por tanto se acepta que no hay correlación entre las calificaciones de las asignaturas de matemática y economía, debido a que el valor del coeficiente de correlación de rangos *R* calculado, es pequeño.

10.4 USO DE UN PAQUETE ESTADÍSTICO PARA CORRELACIÓN DE RANGOS

Como el lector puede notar el uso de estas pruebas estadísticas para evaluaciones de tipo cualitativa, requiere de mucha destreza para tomar decisión respecto al rechazo o no de las hipótesis bajo estudio. Por ello, después de aprendernos el concepto de la prueba de correlación de rango de Spearman, estamos en condiciones de hacer uso de la tecnología de información para señalar si dos grupos de datos presentan relación significativa entre ambos grupos de datos.
El uso del Paquete Statgraphics Centurion, como lo hemos venido haciendo en capítulos anteriores, nos permite un análisis rápido del experimento. Se inicia con la introducción de las puntuaciones o calificaciones en la hoja libro de datos. Cada variable en la columna correspondiente. Posteriormente la secuencia es: $Analizar \rightarrow Métodos\ Multivariados \rightarrow Datos\ continuos \rightarrow Análisis\ multivariado,$ seguidamente se ingresan los datos en el cuadro de diálogo y se ejecuta la orden.

Análisis Multivariado

Datos/Variables:

Matematica

Economía

Existen 22 casos completos a utilizarse en los cálculos.

El StatAdvisor

Este procedimiento está diseñado para resumir varias columnas de datos cuantitativos. Calculará varios estadísticos, incluyendo correlaciones, covarianzas y correlaciones parciales. En el procedimiento también están incluidas una serie de gráficas multivariadas, que proporcionan vistas interesantes de los datos. Use los íconos de Opciones Tabulares y de Opciones Gráficas en la barra de herramientas para análisis, para acceder a estos diferentes procedimientos.

Después de este procedimiento, tal vez quiera seleccionar otro para construir un modelo estadístico de sus datos. Dependiendo de sus objetivos, uno de varios procedimientos podría ser apropiado. A continuación se presenta una lista de objetivos con una indicación del procedimiento que podría ser apropiado.

Correlación Ordinal de Spearman

	Matematica	Economía
Matematica		0,0611
		(22)
		0,7793
Economía	0,0611	

	(22)	
	0,7793	

Correlación

(Tamaño de Muestra)

Valor-P

El StatAdvisor

Esta tabla muestra las correlaciones por rango de Spearman, entre cada par de variables. El rango de estos coeficientes de correlación va de -1 a +1, y miden la fuerza de la asociación entre las variables. En contraste con las correlaciones de Pearson más comunes, los coeficientes de Spearman se calculan a partir del orden (ranks) de los datos, más que de sus valores mismos. En consecuencia, son menos sensibles a valores aberrantes (outliers) que los coeficientes de Pearson. También se muestra, entre paréntesis, el número de pares de datos utilizados para calcular cada coeficiente. El tercer número en cada bloque de la tabla es un valor-P que prueba la significancia estadística de las correlaciones estimadas. Valores-P abajo de 0,05 indican correlaciones significativamente diferentes de cero, con un nivel de confianza del 95,0%.

en este caso no se rechaza la hipótesis nula, debido a que el P-valor es alto 0.7793, y mayor que el nivel de significación alfa de 0.05

Ejercicios 10.3 para correlación de rangos

1. En un concurso de cata de vinos se emplea un juez para calificar dos marcas de vino conocidas en el mercado. Para la prueba se utilizan 18 botellas de cada marca. Las puntuaciones alcanzadas mediante la escala hedónica son:

unidad	Marca 1	Marca 2
1	8	8
2	9	7
3	7	6
4	6	3
5	8	4
6	4	6
7	3	5
8	8	2
9	9	8
10	7	7
11	6	6
12	5	9
13	8	4
14	7	8
15	6	9
16	9	1

17	8	7

a) Calcular el coeficiente de correlación de rangos de Spearman
b) ¿Empleando un nivel de significación del 5%, puede llegarse a la conclusión de que existe una correlación significativa entre las calificaciones de ambos jueces?

2. Se realizó un estudio para indagar respecto al desempeño de los estudiantes de ingeniería de una universidad local de gran prestigio, en las asignaturas de, Ingeniería de procesos y Química. Se seleccionó una muestra aleatoria de 15 estudiantes del segundo año matriculados en ambas asignaturas. Las puntuaciones alcanzadas en las asignaturas seleccionadas se muestran en la tabla siguiente

Alumnos	Ing. Procesos	Química
1	10	19
2	9	6
3	15	17
4	17	12
5	16	9
6	11	14
7	14	19
8	13	11
9	11	7
10	12	8
11	10	14
12	9	13
13	9	15
14	7	17
15	18	12

a) Calcular el coeficiente de correlación de rango de spearman.
b) Realizar la prueba de hipótesis, que la correlación en la población es cero vs la alternativa que es diferente de cero, con un nivel de significación de $\alpha = 0.05$

3. Se llevó a cabo un concurso de cata de Pisco, empleando la escala hedónica de 1 a 9. Para lograr tal fin se seleccionó 10 expertos y se probaron dos muestras de pisco proveniente de dos bodegas reconocidas. Los datos de calificación se muestran en la siguiente tabla.

Juez	Muestra I	Muestra II
1	4	9
2	4	7
3	8	9
4	9	5
5	7	6
6	2	3

7	6	4
8	5	7
9	7	2
10	3	5

a) Calcule el coeficiente de correlación de rangos de Spearman
b) Plantear las hipótesis adecuadas y manifestar sus conclusiones empleando un nivel de significación del 0.05

10.5 PRUEBA DE SUMA DE RANGOS

10.5.1 Prueba de Suma de Rangos de Kruskal-Wallis

En los capítulos del IV al *IX* hemos tratado con experimentos con tres o más niveles de tratamientos, en consideración que las muestran provienen de poblaciones que se distribuyen en forma normal o aproximadamente normal, con varianzas idénticas. En estas circunstancias, se aplica el tradicional método del análisis de varianza en la cual empleamos la prueba *F* para la comparación de las medias de los tratamientos y su significación. Sin embargo, en algunas ocasiones no es posible realizar tales supuestos de normalidad, debido a que no existen indicaciones claras de su cumplimiento. Siendo así, recurrimos al método de la suma de rangos, en este acápite, la de Kruskal-Wallis, que reemplaza eficientemente al método del ANVA.

El procedimiento de la prueba consiste en calcular un estadístico *H* , en la cual, la consideración relevante es que sea de tipo continuo la misma que se expone en la ec. 10.16

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R^2{}_i}{n_i} - 3(N+1)\ ,\ (i = 1,2, \dots k) \qquad \text{ec. 10.16}$$

Dónde: *N*, es el número de elementos de las muestras combinados, n_i, es el número de elementos de cada tratamiento o muestra, k; niveles del factor y *R*, es la suma de rangos de cada muestra y el estadístico *H* se distribuye aproximadamente como χ^2 con $(k-1)$ grados de libertad.
El planteamiento de la H_0: las distribuciones de las *k* poblaciones son iguales y la hipótesis alternativa manifiesta que son diferentes. Como esta prueba es de una sola cola, se rechazará la hipótesis nula si el valor de *H* es igual o mayor que el valor de $\chi^2{}_{(\alpha,v)}$.

$$H_0: m_1 = m_2 = \dots m_k$$
$$H_1: m_1 \neq m_2 \neq \cdots m_k$$

El procedimiento de la prueba de Kruskal-Wallis, evalúa la hipótesis de que la mediana dentro cada nivel de tratamiento, es la misma. Para proceder a la prueba, primero se combinan los datos de todas las muestras y se ordenan de menor a mayor. Cuando los datos se repiten, se calcula el promedio de los rangos que les corresponde.

Ejemplo 10.4 Suponer que se emplean cuatro tipos de papillas para niños nacidos con bajo peso, en base a harina: de papa, camote, trigo y plátano, que se seleccionaron aleatoriamente. Después de un tiempo, se realiza la medición del peso en las mismas condiciones que se tomó al inicio. La cantidad de niños por cada muestra es, $8, 10, 15,14$. En la tabla siguiente se muestran los aumentos de peso de los niños por tipo de papilla.

Tabla 10.5 Ganancia de pesos (Kg) para pruebas de suma de rangos

Papa		Camote		Trigo		Plátano	
Kg	Rango	Kg	Rango	Kg	Rango	Kg	Rango
2.5	7.5	3.1	31.5	2.9	20.5	3.8	40
3.9	42	4.2	46	2.8	15.5	2.9	20.5
2.3	3.5	3.0	26.5	2.7	12	2.6	9.5
3.5	37	2.9	20.5	3.0	26.5	4.1	44.5
2.0	1	3.4	35.5	2.7	12	2.6	9.5
2.8	15.5	2.8	15.5	3.0	26.5	2.4	5.5
2.1	2	2.9	20.5	2.9	20.5	3.4	35.5
2.5	7.5	4.1	44.5	2.8	15.5	3.0	26.5
		3.1	31.5	3.1	31.5	2.9	20.5
		4.0	43	3.0	26.5	3.7	38
				3.8	40	3.8	40
				2.7	12	2.4	5.5
				4.3	47	3.1	31.5
				3.0	26.5	2.3	3.5
				3.2	34		
	116		315		366.5		330.5

Planteamiento de hipótesis:

H_0: *El aumento de peso de las muestras son iguales*
H_1: *El aumento de peso de las muestras son diferentes*
$\alpha = 0.05$

Si el valor del estadístico H es igual o mayor que el valor de $\chi^2_{(\alpha,v)}$ de la tabla se rechaza la hipótesis nula.

El estadístico se calcula mediante la ec 10.16 con datos de la tabla 10.5

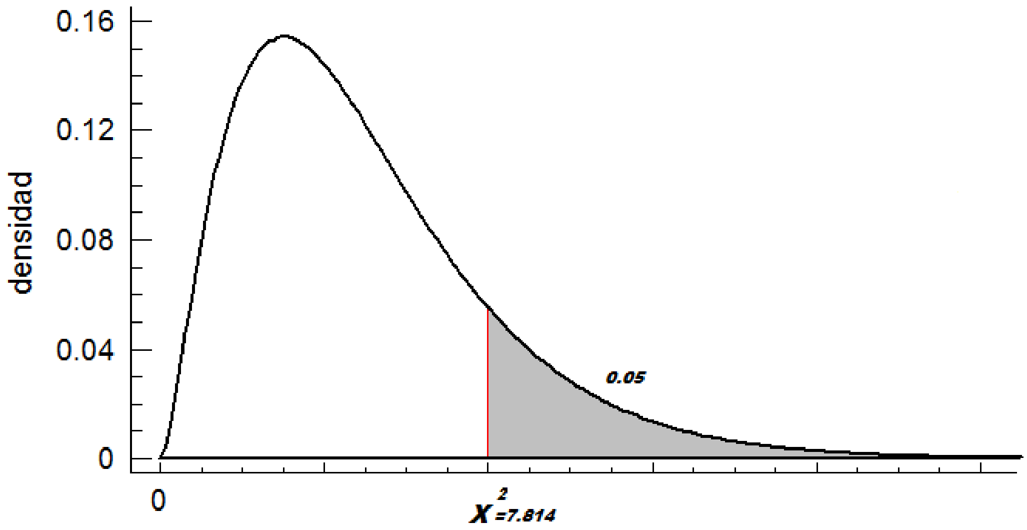
$$H = \frac{12}{47(48)}\left(\frac{116^2}{8} + \frac{315^2}{10} + \frac{366.5^2}{15} + \frac{330.5^2}{14}\right) - 3(48) = 6.733$$

El valor de $\chi^2_{(0.05,3)} = 7.814$

lo que resulta mayor que el valor calculado *H,* debido a este resultado, la decisión es la de no rechazar la hipótesis nula. Las cuatro papillas para bebés nacidos con

bajo peso, no tienen efectos significativamente diferentes en los aumentos de peso de dichos niños.
La prueba de la suma de rangos es, como el lector podrá apreciar, prueba de una sola cola. Así mismo, si el valor de H hubiese resultado mayor, la decisión sería la de rechazar la hipótesis nula, en consecuencia, estaría reflejando el hecho de que las distribuciones de las poblaciones son diferentes. En la siguiente figura 10.4 se ilustra la prueba.

Fig. 10.4 Prueba de Kruskal-Wallis



10.5.2 Uso de un Paquete Informático para la Suma de Rangos de Kruskal-Wallis

Como en los casos anteriores, afortunadamente el paquete que usamos en este libro, también puede solucionar el análisis del experimento mediante la prueba de la suma de rangos de Kruskal-Wallis, empleando el Statgraphics centurión XV.
La secuencia de uso sigue el siguiente orden:

$Analizar \rightarrow Datos\ continuos \rightarrow Comparación\ de\ varias\ muestras \rightarrow$
$Comparacion\ de\ varias\ muestras,$ seguidamente se ingresan los datos que, previamente se ingresaron en el editor de datos, en el cuadro de diálogo que aparece seguidamente y se pulsa *Múltiples columnas de datos* y se ejecuta la orden..

Prueba de Kruskal-Wallis

Harina	*Tamaño de Muestra*	*Rango Promedio*
papa	8	14,5
camote	10	31,5

trigo	15	24,4333
plátano	14	23,6071

Estadístico = 6,90041   Valor-P = 0,0751387

El StatAdvisor

La prueba de Kruskal-Wallis evalúa la hipótesis nula de que las medianas dentro de cada una de las 4 columnas es la misma. Primero se combinan los datos de todas las columnas y se ordenan de menor a mayor. Después, se calcula el rango (rank) promedio para los datos de cada columna. Puesto que el valor-P es mayor o igual que 0,05, no existe una diferencia estadísticamente significativa entre las medianas con un nivel del 95,0% de confianza.

Como podrá apreciarse los resultados obtenidos mediante el uso del paquete statgraphics ratifica la conclusión a la que arribamos, que no existen diferencias significativas, debido a que el valor de P es mayor que el nivel de significación de 0.05 considerado en el experimento.

Ejercicios 10.4 de Kruskal- Wallis

1. ¿Puede manifestar las diferencias observadas entre el método del análisis de varianza y la prueba de la suma rangos de Kruskal-Wallis?
2. ¿La prueba de suma de rangos de Kruskal-Wallis, es una prueba de una o de dos colas?
3. Se llevó a cabo un experimento agrícola en la que se prueban tres variedades de tomate distribuidas en 40 parcelas homogéneas en forma aleatoria. Los rendimientos en kilogramos por parcela se muestran a continuación.

Variedad A	Variedad B	Variedad C
50	45	50
60	39	48
70	67	60
65	61	36
42	45	35
40	38	75
48	49	81
	50	64
	60	59
	73	31
	80	

a) Plantear adecuadamente la hipótesis nula
b) Manifestar si existen diferencias significativas en el rendimiento de las tres variedades con un nivel de significación del 0.05. Emplear la prueba no paramétrica de suma de rangos.

4. Se desea emprender un experimento a fin de probar cuatro marcas de baterías de celulares que se expenden en el mercado. Los datos en horas de duración, se muestra en la tabla siguiente

Marca A	Marca B	Marca C	Marca D
150	154	146	156
180	165	179	158
170	186	164	179
160	179	156	184
150	180	146	169
190	164	164	154
	175	168	1789
		176	189

a) Plantear las hipótesis adecuadas.
b) ¿Existen evidencias suficientes para afirmar con certeza que las duraciones de las baterías de marcas distintas son diferentes al nivel del *0.05*?. Usar prueba no paramétrica de suma de rangos.

5. En la tabla siguiente se proporcionan las calificaciones alcanzadas por 10 estudiantes de Pedagogía en las asignaturas de, lengua española, métodos de estudio e historia.

Lengua española	Métodos de estudio	Historia
19.6	18	19.8
17.2	17.8	17.8
15.6	18.2	16
16.8	19	17.6
17.4	19.4	19.5
15.3	18.6	18
18.4	18	17
15.4	19	15
13.7	17	16.4
15.9	16.4	17.6

Empleando un nivel de significación del 1%, realizar la prueba de Kruskal-Wallis para la hipótesis de que los diez estudiantes universitarios tienen el mismo nivel de aprendizaje en las tres asignaturas.

6. En una Facultad de Educación de una universidad se califica a los estudiantes en el área de Ortografía de acuerdo a su especialidad, en Educación Secundaria, Primaria e Inicial. Sus puntajes logrados por 20 alumnos se muestran en la siguiente tabla:

Alumno	Secundaria	Primaria	Inicial
1	80	90	60
2	90	90	60
3	64	97	65

4	75	89	64
5	70	94	70
6	65	68	78
7	60	97	79
8	60	94	89
9	65	92	87
10	68	90	80
11	75	80	90
12	95	89	90
13	97	97	98
14	48	74	75
15	68	86	76
16	75	87	67
17	70	80	64
18	76	86	52
19	74	76	57
20	72	70	58

a) Plantear las hipótesis nula y alternativa adecuadas.
b) ¿Existen diferencias apreciables en la calificación de los estudiantes por especialidad?
c) Hacer la prueba de la suma de rangos

10.5.3 Prueba de Suma de Rangos de Friedman

Esto es una prueba equivalente al análisis de varianza, en diseños de bloques, en pruebas paramétricas, con la prueba *F* como herramienta de comprobación. En su versión no paramétrica, es decir, cuando se tengan dudas respecto de la independencia de los datos dentro de los bloques y de la suposición de la normalidad, puede eficientemente, emplearse la prueba de Friedman, para diferencias de medianas. Así mismo, esta prueba de distribución libre, puede ser usada en situaciones en las que se registran muestras como resultado de un experimento, de forma tal, que los datos de cada muestra sean bastante similares entre sí, de manera que a cada uno de los datos de la muestra se le aplicará uno de los tratamientos del experimento.

La hipótesis nula en juegos para esta prueba es, que los datos de los tratamientos tienen la misma distribución de probabilidad o tienen las medianas iguales, frente a la hipótesis alternativa de que por lo menos una de las medianas de los tratamientos no es igual.

Las asignaciones de los rangos se hace de menor a mayor en cada bloque, correspondiendo 1 al de menor y t al de mayor valor, en caso de observaciones iguales le corresponderá el promedio de los rangos correspondientes, así por ejemplo, dos valores iguales que se ubican en el 4 y 5 rango, el promedio es 4.5 para ambos. A continuación se suman los rangos de cada tratamiento.

El estadístico de prueba de Friedman es:

$$F = \frac{12}{bt(t+1)} \sum R_{i.}^2 - 3b(t+1) \qquad \text{ec. } 10.17$$

Donde:

$R_{i.}$, $es\ la\ suma\ de\ los\ rangos (i = 1 \dots t)$

b: $es\ el\ numero\ de\ bloques$

t: $numero\ de\ tratamientos\ o\ muestras$

que se aproximará a una distribución chi-cuadrada con $(t-1)$ grados de libertad, cuando el número de bloques es grande, o, sea más de cinco[17]. Entonces rechazaremos la hipótesis nula, para cualquier nivel de significación, si el valor calculado de *F(de Friedman)* es mayor que el valor crítico de la distribución chi-cuadrado, del extremo superior, con $t-1$ grados de libertad. Desarrollemos un ejemplo para ilustrar el empleo del método.

Ejemplo 10.5 Un investigador en Pedagogía desea efectuar un experimento para determinar si los Métodos de enseñanza (tratamientos) de la matemática escolar influyen significativamente en su rendimiento. Se comparan cinco métodos de enseñanza, para lo cual se consideran 40 estudiantes de 8 colegios de la misma localidad (bloques), repartidos aleatoriamente, cinco estudiantes por colegio, a quienes se aplica los métodos. Los datos correspondientes al rendimiento de cada estudiante se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 10.5 Rendimientos de alumnos en matemática
Según método de enseñanza

Bloques de Colegios	Métodos				
	I	II	III	IV	V
1	65	75	87	90	95
2	80	85	99	67	62
3	70	75	98	86	69
4	60	95	85	87	79
5	68	64	87	86	78
6	75	85	80	82	69
7	82	70	84	73	81
8	81	87	67	83	91

Empleando el método de suma de rangos de Friedman, al nivel de significación del 5%, se realiza el análisis completo de los datos para determinar si existen evidencias que las medianas de rendimientos de los alumnos en la asignatura de matemática son significativamente diferentes.

Solución. El lector puede apreciar que los datos registrados están distribuidos en un diseño de bloques aleatorios, en la cual 40 estudiantes fueron distribuidos en 8 bloques. Los resultados del experimento se presentan en la tabla 10.5. Para ilustrar el caso, suponemos que los rendimientos no se distribuyen en forma normal, para cada método de enseñanza. En esta situación, no es necesario conocer el patrón de distribución de los valores registrados, entonces se emplea la prueba de rangos de Friedman, de libre distribución, para las diferencias entre las cinco medianas.

Hipótesis:

[17] Berenson y Levine (996). Estadística Básica en Administración. Conceptos y Aplicaciones

$H_0: M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5$
$H_0: M_1 \neq M_2 \neq M_3 \neq M_4 \neq M_5$

A continuación convertimos los datos de la tabla 10.5 en rangos dentro de cada bloque, como se muestra en la tabla 10.6

Tabla 10.6 Suma de rangos de Friedman

Bloques de Colegios	Métodos				
	I	II	III	IV	V
1	1	2	3	4	5
2	3	4	5	2	1
3	2	3	5	4	1
4	1	5	3	4	2
5	2	1	5	4	3
6	2	5	3	4	1
7	4	1	5	2	3
8	2	4	1	3	5
Suma de rangos	17	25	30	27	21

Una forma de comprobar la asignación de rangos lo hace Berenson y Levine (1996), en la ec. 10.18

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = \frac{bt(t+1)}{2} \qquad \text{ec. 10.18}$$

Para los datos de la tabla 10.6, se comprueba que:

$$17 + 25 + 30 + 27 + 21 = \frac{(8)(5)(6)}{2}$$

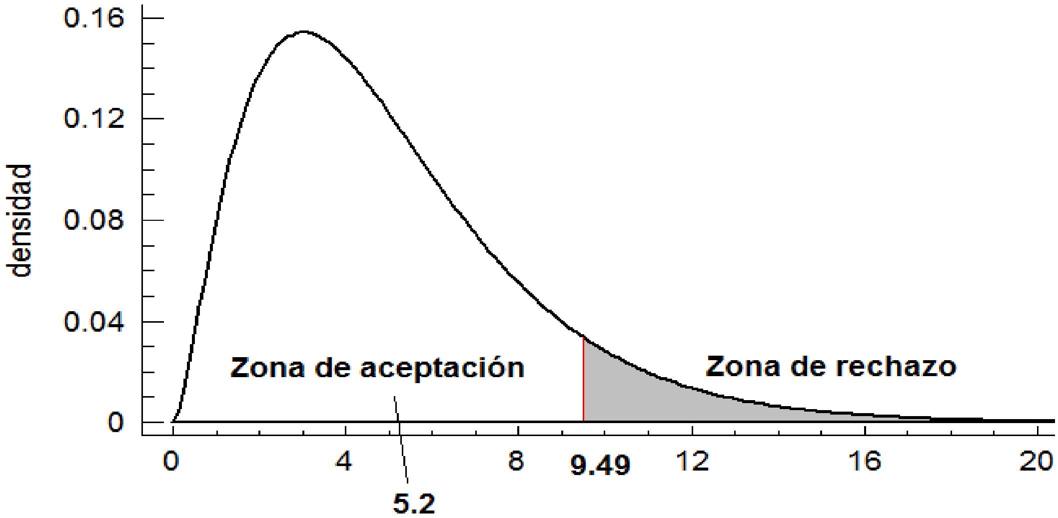
$$120 = 120$$

Para calcular el estadístico de Friedman, usamos la ec. 10.17 y se obtiene:

$$F = \frac{12}{(8)(5)(6)}(17^2 + 25^2 + 30^2 + 27^2 + 21^2) - 3(8)(6) = 5.2$$

El valor crítico de chi- cuadrado de extremo superior es: ${\chi^2}_{(0.05,4)} = 9.49$
Debido a que el valor de chi-cuadrado 9.49, con $5 - 1 = 4$ grados de libertad, es mayor que el estadístico de friedman, igual a 5.2, la hipótesis nula no es rechazada al nivel de significación del 5%. Pudiendo llegar a la conclusión que las diferencias observadas en los rendimientos en la asignatura de matemática, para diferentes métodos de enseñanza, son debidas al azar.
En la fig. 10.5, se muestra el resultado de la prueba

Fig. 10.5 Prueba de rangos de Friedman



10.5.4 Uso de un Paquete Informático para la Suma de Rangos de Friedman

Como en el caso anterior, siguiendo la misma secuencia, se arriba a la ventana que corresponde, tal como apreciamos seguidamente
Analizar → Datos continuos → Comparación de varias muestras → Comparacion de varias muestras, seguidamente se ingresan las columnas de datos del editor de datos, en el cuadro de diálogo y se ejecuta la orden..

Comparación de Varias Muestras

Muestra 1: Método I

Muestra 2: Método II

Muestra 3: Método III

Muestra 4: Método IV

Muestra 5: Método V

Muestra 1: 8 valores en el rango de 60,0 a 82,0

Muestra 2: 8 valores en el rango de 64,0 a 95,0

Muestra 3: 8 valores en el rango de 67,0 a 99,0

Muestra 4: 8 valores en el rango de 67,0 a 90,0

Muestra 5: 8 valores en el rango de 62,0 a 95,0

El StatAdvisor

Este procedimiento compara los datos en 5 columnas del archivo de datos actual. Realiza varias pruebas estadísticas y gráficas para comparar las muestras. La prueba-F en la tabla ANOVA determinará si hay diferencias significativas entre las medias. Si las hay, las Pruebas de Rangos Múltiples le dirán cuáles medias son significativamente diferentes de otras.

Prueba de Friedman

	Tamaño de Muestra	*Rango Promedio*
Método I	8	2,125
Método II	8	3,125
Método III	8	3,75
Método IV	8	3,375
Método V	8	2,625

Estadístico = 5,2 Valor-P = 0,267385

El StatAdvisor

La prueba de Friedman evalúa la hipótesis nula de que las medianas dentro de cada una de las 5 columnas es la misma. Los datos en cada fila ordenados de menor a mayor. Se calcula entonces el rango promedio para cada columna. Puesto que el valor-P es mayor o igual que 0,05, no existe una diferencia estadísticamente significativa entre las medianas con un nivel del 95,0% de confianza, por tanto no se rechaza la hipótesis nula.

Como puede apreciarse, los resultados obtenidos mediante el uso del paquete statgraphics ratifica la conclusión a la que arribamos, que no existen diferencias significativas, debido a que el valor de P es mayor que el nivel de significación de *0.05* considerado en el experimento, por tanto no se rechaza la hipótesis nula.

Ejercicios 10.5 de Friedman

1. Manifestar la diferencia entre la prueba del análisis de varianza y la prueba no paramétrica de Friedman.
2. En qué circunstancias se puede utilizar la prueba de suma de rangos de Friedman?
3. Se diseña un experimento en la cual se desea averiguar si existen diferencias en las respuestas de alumnos de institutos superiores de la localidad respecto a preguntas formuladas en la asignatura de inglés

técnico. Para el experimento se comparó cinco institutos superiores (tratamientos) y se seleccionó seis profesores de igual experiencia de cada instituto (bloques), los alumnos seleccionados dentro el grupo del tercio superior se asignó aleatoriamente a cada profesor. Las respuestas a las preguntas se muestran en la tabla que sigue.

Bloque de profesores	Institutos				
	A	B	C	D	E
P_1	68	85	78	70	92
P_2	85	70	82	94	82
P_3	84	75	94	80	70
P_4	86	80	64	80	79
P_5	90	70	80	60	70
P_6	80	90	70	60	95

a) Emplear la prueba de rangos de Friedman para determinar si existen diferencias entre las respuestas de los estudiantes provenientes de los diferentes institutos, para un nivel de significación del 5%.

b) Redactar un informe para su profesor de Diseño de experimentos, referente a las respuestas de los alumnos de los institutos superiores.

4. Se realizó un experimento en la cual se desea probar el rendimiento de cuatro máquinas que producen piezas. Para tal efecto se conduce un experimento empleando cuatro días de la semana como si se tratara de bloques. Los rendimientos de las máquinas por número de piezas por hora se pueden observar en la tabla que sigue.

Días(Bloque)	Máquina			
	I	II	III	IV
Lunes	150	200	180	195
Martes	180	201	190	198
Miércoles	156	250	170	210
Jueves	170	240	185	220

a) Emplear la prueba de rangos de Friedman para determinar si existen diferencias entre los rendimientos de las máquinas, para un nivel de significación del 1%.

b) Redactar un informe para el profesor de Diseño de experimentos, referente a los rendimientos de las máquinas.

5. Se realizó un concurso de matemática en cinco colegios privados de una ciudad del Perú, distribuido en sectores (Bloques). Se escogió cuatro sectores y se aplicó la prueba. Los resultados (en puntaje) se aprecian en la tabla siguiente:

Sector (Bloques)	Colegio				
	A	B	C	D	E
I	85	88	88	85	87
II	88	89	85	87	84

III	87	90	78	89	86
IV	74	92	79	96	97

a) Emplear la prueba de rangos de Friedman a fin de determinar si existen diferencias marcadas entre estudiantes de los distintos colegios, para un nivel de significación del 5%.
b) ¿Qué colegio del experimento muestra mejores resultados?

10.6 PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE

Esta prueba consiste en tomar una muestra en forma aleatoria de la población de interés, la misma que proporciona una distribución empírica constituida por frecuencias observadas. Entonces, la distribución teórica o función de densidad que se específica en la hipótesis nula (binomial, uniforme, Poisson o normal) se ajusta a la distribución empírica. Por tanto, los valores esperados resultan de multiplicar las probabilidades asociadas a las clases de la distribución teórica por el tamaño de muestra de la distribución empírica.

10.6.1 BONDAD DE AJUSTE PARA UNA DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA

En esta prueba sencilla se busca probar que una distribución empírica se mantiene invariable cuando se produce diversos experimentos en la práctica. Consiste en registrar frecuencias observadas y en calcular frecuencias esperadas en relación a una distribución empírica especificada de una población.
La prueba de hipótesis que se plantea en este caso es: Que los datos del experimento siguen la distribución especificada. Mientras que la hipótesis alternativa afirma que la muestra no ha sido tomada de la población con la distribución especificada.
El estadístico de prueba chi-cuadrado se puede definir como:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad i = 1 \dots k \qquad \text{ec. 10.19}$$

Dónde: O_i: frecuencias observadas, E_i: frecuencias esperadas, k: Nº categorías
que se distribuye aproximadamente como una chi-cuadrado con $(k-1)$ grados de libertad.
La regla de decisión se plantea como: Rechazar H_0, si $\chi^2_{calculado} > \chi^2_{(\alpha,v)}$
Observe en la ecuación 10.19, que a mayor diferencia, el valor de χ^2 será mayor, lo que significa un ajuste malo y por consiguiente la probabilidad de rechazar la hipótesis nula es mayor.

Ejemplo 10.6 El director de un colegio estatal manifiesta que los alumnos del colegio al finalizar el quinto año de educación secundaria, orientan sus preferencias hacia las siguientes carreras profesionales: 30% medicina, 20% derecho, 10% ingeniería, 15% administración, 20% contabilidad y 5% medio ambiente. Después de las pruebas de aptitud tomados a los 172 estudiantes se pudo registrar las preferencias de los alumnos, la misma que fueron las siguientes: 50 medicina, 35 derecho, 17 ingeniería, 25 administración, 40 contabilidad y solamente 5 alumnos medio ambiente. Usando un nivel de significación del 5% determinar si ha variado las preferencias de los alumnos por las carreras profesionales señalado. Los datos se muestran en la tabla 10.7

Tabla 10.7 Frecuencias observadas y esperadas para el experimento de preferencias educacionales

Categoría de variable	Frecuencias observadas (O_i)	Distribución empírica	Frecuencias esperadas (E_i)	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	50	0.30	51.6	0.046
2	35	0.20	34.4	0.010
3	17	0.10	17.2	0.002
4	25	0.15	25.8	0.025
5	40	0.20	34.4	0.912
6	5	0.05	8.6	1.507
	172	1.00	172	2.502

Las hipótesis a probar son:

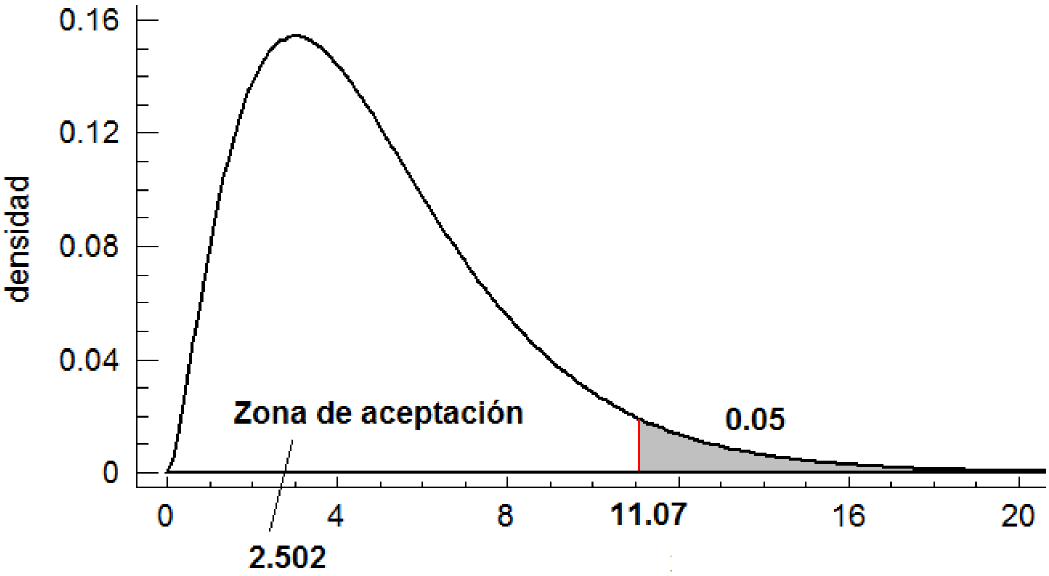
H_0: $p_M = p_D = p_I = p_A = p_C = p_{MA}$
H_1: $p_M \neq p_D \neq p_I = p_A \neq p_C \neq p_{MA}$

Para un $\alpha = 0.05$, con $6 - 1 = 5$ Grados de libertad, el valor ${\chi^2}_{(0.05,5)} = 11.07$ resulta mayor que el valor de chi-cuadrado calculado de 2.502, de la tabla 10.7. Por tanto, dado este resultado, no se rechaza la hipótesis nula, significando que el director del colegio tenía razón al manifestar su opinión, lo que demuestra que las preferencias educativos en los egresados del colegio siguen la distribución empírica especificada por el director.

.

En la fig. 10.6 se observa la zona de rechazo, el valor calculado de chi-cuadrado 2.502, es inferior a 11.07 y cae en la zona de no rechazo.

Fig. 10.6 Distribución chi-cuadrado para bondad de ajuste



Ejercicios 10.6 de bondad de ajuste distribución empírica

1. Un consultor financiero manifiesta a sus clientes que el 30% de los usuarios de los bancos apertura una cuenta de ahorros, el 20% una cuenta corriente, el 40% apertura una tarjeta de crédito y 10 % hace depósitos a cuentas fuera de la región. Al realizar una encuesta a 200 clientes de bancos para que manifiesten sus motivos, 50 clientes manifiestan que aperturan una cuenta de ahorros, 60 una cuenta corriente, 70 una tarjeta de crédito y 20 realizan depósitos a cuentas fuera de la región. Realizar una prueba de bondad de ajuste para comprobar si el consultor financiero asesora correctamente a sus clientes, con un nivel de significación del 5%.
2. El director de una escuela estatal manifiesta que sus alumnos provienen de familias Clasificadas por su extensión en un 30%, de familias monoparentales 50% y 20% de familias parentales. La dirección del ministerio de educación realiza un censo entre sus estudiantes, el mismo que dio el siguiente resultado: 100 alumnos provienen de familias Por su extensión, 130 alumnos provienen de familias monoparentales y 80 alumnos de familias parentales. Realizar una prueba de bondad de ajuste para verificar si la afirmación del director de la escuela estatal es correcta. Usar un nivel de significación del 10%.

3. Una entidad no gubernamental manifiesta que los accidentes fatales en la capital de la república, hasta hace dos años se distribuyen, en la semana, de la siguiente manera: 5% el lunes, 15% martes, 15% miércoles, 10% jueves,

20% viernes, 30% sábado y 5% el domingo. Se desea probar si los accidentes fatales, en la actualidad, tienen el mismo patrón de hace dos años. Con este fin, se hace un sondeo de las ocurrencias en una determinada semana, obteniendo los siguientes resultados: lunes 4 accidentes, martes 12, miércoles 14, jueves 12, viernes 25, sábado 30 y domingo 6. Probar la hipótesis de que el patrón señalado por la ONG, continúa como hace dos años, con un nivel $\alpha = 0.01$

4. Los investigadores de mercado están interesados en determinar si los patrones de ingresos familiares en alguna zona del Perú es el de hace 10 años atrás. Se conoce que hace aproximadamente 10 años el ingreso familiar en forma proporcional de la zona era el siguiente:

Categoría	Categoría de ingreso(S/)	%
1	Menos de 200	20
2	200 – 400	30
3	400 – 600	20
4	600 – 900	15
5	900 – 1300	10
6	1300 – y más	5
	TOTAL	100

Con el fin de determinar si el patrón sigue siendo el mismo, se elige al azar 800 familias y se obtiene los siguientes resultados:

Categoría de ingreso	1	2	3	4	5	6
Nº de familias	50	60	150	300	200	40

Empleando un nivel de significación del 5% probar la hipótesis nula de que el patrón de distribución de los ingresos familiares de la zona no ha cambiado significativamente.

10.6.2 BONDAD DE AJUSTE CON LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

El estadístico de prueba para ajustar una distribución normal a datos empíricos que se consideran sigue una distribución normal, es el mismo estadístico de la ecuación *10.19*. Para hacer uso de esta prueba los datos que se registran deben ser de naturaleza cuantitativa. Desarrollemos un ejemplo para ilustrar esta prueba.

Ejemplo 10.7 Se recoge información sobre rendimiento escolar alcanzado por 132 estudiantes de colegios secundarios a fin de verificar si la muestra extraída proviene de una distribución normal. Los datos en el sistema centesimal, son los siguientes:

75	80	60	54	56	50	67	80	90	96	45
76	56	46	48	51	53	64	62	60	50	52
53	84	87	95	90	96	84	97	98	65	68
75	71	70	80	46	48	61	48	67	68	78
95	86	80	87	85	82	83	84	86	64	68
61	60	63	68	62	62	62	63	64	68	67
67	84	84	81	82	86	91	54	56	52	57
58	59	59	54	56	52	52	52	51	56	53
57	61	68	67	69	43	46	48	54	65	68
62	66	55	44	88	95	77	55	44	75	74
77	44	66	55	88	55	66	88	78	90	90
74	75	65	60	64	65	67	87	84	60	64

a) Plantear las hipótesis adecuadas.
b) Realizar una prueba de bondad de ajuste, empleando la distribución normal.
c) ¿Puede afirmarse con propiedad que los datos provienen de una población normal?

Solución:

a) Hipótesis

H_0: *La población de origen de la cual se extrae la muestra es normal*

H_1: *La población de origen no es normal*

b) Elegimos en forma arbitraria el nivel de significación: $\alpha = 0.05$
c) El estadístico de prueba es:

$$X^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Donde: O_i *son las frecuencias observadas*, E_i *las frecuencias esperadas*.

La regla de decisión se plantea de la siguiente manera:

Si ${\chi^2}_{calculado} > {\chi^2}_{tabulado}$ se rechaza la H_0, caso contrario no se rechaza.

Puesto que se tiene 132 calificaciones de estudiantes sobre rendimiento, la distribución de frecuencias se muestra en la tabla 10.8, en la que se muestran las frecuencias observadas. La media y la desviación estándar es, $\bar{x} = 67.7197$ *y* $\hat{\sigma} = 14.5494$ respectivamente. Debido a que se desea probar si la muestra de 132 calificaciones de estudiantes provienen de una población normal, entonces procedemos a ajustar los datos mediante la normal, haciendo uso de la media y desviación estándar como estimadores de los parámetros de la población. El procedimiento consiste, en calcular las frecuencias esperadas para cada categoría de la tabla de frecuencias, mediante las probabilidades de la tabla normal del anexo A. Así por ejemplo, para calcular la frecuencia esperada de la primera clase planteamos la probabilidad, mediante:

$$P(42 < X < 49) = P\left(\frac{42-67.7197}{14.5494} < Z < \frac{49-67.7197}{14.5494}\right) = P(-1.78 < Z < -1.29) = 0.061$$

Sin embargo; se debe tener cuidado que la primera y última clase serán intervalos abiertos, al cabo que ninguna área de la distribución normal pueda ser ignorada. En este caso el intervalo puede ser replanteado como:

$$P(X < 49) = P\left(Z < \frac{49-67.7197}{14.5494}\right) = P(Z < -1.29) = 0.0991113$$

El procedimiento es similar para las otras categorías y por analogía, la última clase se puede formular como:

$$P(X > 91) = P\left(Z > \frac{91-67.7197}{14.5494}\right) = P(Z > 1.60) = 0.054789$$

Las frecuencias esperadas se calculan mediante el producto, del total de la muestra con la probabilidad de cada categoría. Seguidamente, se muestra la forma de calcular la frecuencia esperada para la primera y última clase, multiplicando la probabilidad por el número total de estudiantes (132)

$E_1 = 132(0.0991113) = 13.08$
$E_8 = 132(0.054789) = 7.24$
El resto de frecuencias se calcula de modo similar, como se observa en la tabla 10.8

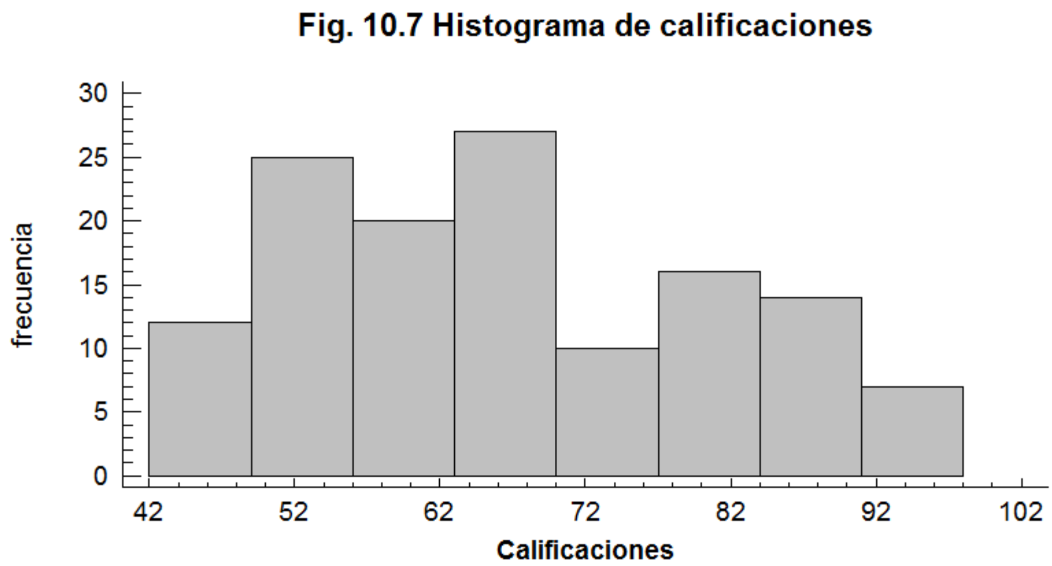
Tabla 10.8 Calificaciones de estudiantes

Clase	Rendimiento escolar	Frecuencia observada (O_i)	Probabilidad por categoría	Frecuencia esperada (E_i)	$\frac{(0_i - E_i)^2}{E_i}$
I	42.0 - 49.0	12	0.0991113	13.08	0.089
II	49.0 - 56.0	25	0.1111497	14.67	7,274
III	56.0 - 63.0	20	0.162558	21.46	0,063
IV	63.0 - 70.0	27	0.189454	25.00	0,160
V	70.0 - 77.0	10	0.175942	23.22	7,527
VI	77.0 - 74.0	16	0.130208	17.19	0,082
VII	74.0 - 91.0	15	0.076788	10.14	2,329
VIII	91.0 - 98.0	7	0.054789	7.24	0,008
	TOTAL	132	1.00000	132.0	17.532

Media = 67,7197 Desviación Estándar = 14,5494

Entonces, el valor calculado de chi-cuadrado es $X^2 = 17.53$, con grados de libertad igual a, $v = k - 1 - m = 8 - 1 - 2 = 5$. Donde m es el número de parámetros ($\mu\ y\ \sigma$). Buscando en la tabla C del anexo, el valor $\chi^2_{(0.05,5)} = 11.07$. Por tanto, se rechaza la hipótesis nula, dado que el valor calculado es mayor que el valor de la tabla. Significando que los datos de la muestra no fue extraída de una población normal.

Para refrendar los resultados del experimento, se muestra en la fig. 10.7 un histograma de frecuencias de calificaciones de los 132 estudiantes provenientes de colegios secundarios y se puede notar que los datos no guardan las características de una distribución normal, ya que muestra un ligero sesgo hacia la derecha, por esta razón la hipótesis nula se ha rechazado.



Ejercicios 10.7 para Bondad de ajuste con la Distribución normal

1. Los datos siguientes, son estaturas (en centímetros) de un grupo de 70 deportistas que inician un programa de alta competencia, cuyos datos se supone provienen de una distribución normal. Construir una distribución de frecuencias con las estaturas. Usar la prueba de bondad de ajuste de la distribución normal con un nivel de significación del 5% para probar la suposición de normalidad.

Estatura de deportistas (Cms)

148	158	168	158	178	189	189	192	193	168
167	160	158	150	170	180	190	175	155	166
168	187	189	156	158	169	169	175	156	186
159	169	168	167	156	158	159	188	187	194
186	176	173	174	175	178	179	172	173	171
172	181	182	183	161	162	163	160	165	167
168	169	164	157	158	154	156	159	169	182

2. La demanda semanal de un producto en el mercado nacional tiene una distribución normal. Aplicar una prueba de bondad de ajuste para los 60 datos que aparecen seguidamente y probar la suposición de normalidad. Use un nivel de significación del 1%

Demanda de un producto

56	70	68	54	56	69	47	85	96	54
51	58	56	57	58	59	65	47	58	46
48	59	42	46	57	59	64	68	67	72
78	79	65	78	74	71	78	56	85	84
90	98	96	95	92	88	87	87	54	57
58	65	64	62	59	46	58	60	65	54

3.- Las calificaciones (sistema vigesimal) de los estudiantes de una universidad del estado en la asignatura de economía, se supone sigue una distribución normal. Para probar esta suposición de normalidad se recogen datos de 100 estudiantes de economía que se muestran a continuación. Empleando un nivel de significación del 10%, realizar la prueba de hipótesis y probar la suposición.

Calificaciones

8	10	12	18	19	17	16	14	15	12
16	15	14	18	19	16	14	13	15	16
18	15	16	14	14	14	15	15	16	16
16	12	12	12	13	13	13	11	11	11
10	10	10	10	19	20	15	19	20	14
16	13	17	17	18	17	18	15	15	15
16	16	16	14	14	14	14	10	9	9
8	17	6	7	6	7	8	9	9	8
7	10	10	11	15	16	14	16	55	16
16	14	15	16	11	17	19	16	14	13

4. Las remuneraciones (en nuevos soles) de 70 trabajadores agrícolas, se supone siguen una distribución normal. Un comisionado del ministerio de trabajo registra las remuneraciones de los trabajadores a fin de emprender una campaña de mejoramiento salarial. Usando un $\alpha = 0.05$ probar la proposición de normalidad con los datos que se aprecian seguidamente.

Remuneraciones de trabajadores (n.s.)

700	850	860	940	900	810	687	750	769	842
840	940	950	780	658	870	600	598	578	614
600	700	800	610	620	640	630	670	680	690
710	720	730	740	750	760	770	780	790	810
800	820	830	840	850	870	880	860	890	600
640	650	850	870	920	1000	1000	950	687	840
860	870	856	820	810	890	836	974	936	830

5. Las empresas privadas se han convertido en la palanca del crecimiento de la economía peruana en los últimos años. Un funcionario estatal ha registrado los salarios mensuales de los trabajadores de las empresas a fin de verificar la veracidad de este carácter. Los datos en nuevos soles, de acuerdo a antecedentes de años anteriores, siguen una distribución normal, los mismos que se muestran a continuación. Usando un nivel de $\alpha = 0.05$, realizar la prueba de bondad de ajuste con el fin de probar la normalidad de los datos. Así mismo, graficar un histograma de los salarios para ratificar los resultados de la prueba.

Salarios de trabajadores (n.s.)

1400	1500	1600	1700	1800	1900	1810	2000	2100	2500
2450	2300	2400	1950	1980	1970	1970	1750	1850	1750
1740	1650	1450	1600	1500	1490	1680	1750	1950	1990
1870	2230	2450	2350	2500	2410	1310	1500	1640	1650
1750	1860	1930	1840	1980	1970	1890	1790	1890	1783
1987	1860	1870	1950	2100	2200	2300	2320	2130	2380
1840	2370	2390	1870	1950	1640	1540	1860	1670	1490
1456	1468	2120	2140	2354	2300	2340	1880	1990	1580

10.5 PRUEBA DE INDEPENDENCIA CON TABLAS DE CONTINGENCIA

El uso de la distribución chi-cuadrado, nos ha permitido realizar pruebas con sólo un factor para distribuciones multinomiales. Sin embargo, la potencia y versatilidad de la chi-cuadrado se demuestra en su uso frecuente en pruebas en la que se consideran dos factores, con más de dos niveles, o mediante tablas de contingencia hxc, de hileras por columnas.
En las pruebas de independencia las hipótesis en disputa son:
H_0: Los factores categóricos son independientes o no están relacionados entre si
H_1: Los factores no son independientes.

El estadístico de prueba es la misma ecuación 10.19

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

La regla de decisión consiste en rechazar la hipótesis nula de independencia cuando el valor de $\chi^2{}_{calculado}$ es mayor que $\chi^2{}_{tabulado}$, de la distribución chi_cuadrado que posee $(h-1)(c-1)$ grados de libertad, es decir:
Rechazar $H_0\ si\ \chi^2 > \chi^2{}_{[(\alpha)(h-1)(c-1)]}$

En esta prueba juega un rol relevante las tablas de contingencia $h\,x\,c$. Las tablas de contingencia son tablas de doble entrada en la que se disponen los niveles de las variables en cuestión. Generalmente los niveles de la variable de mayor interés pueden ser ubicados en la primera columna correspondiendo sus niveles a las hileras o filas(factor *A*), mientras que los niveles de la variable secundaria(factor *B*) se ubican en las columnas, propiamente, tal como apreciamos en la tabla 10.9. Así mismo, las frecuencias que aparecen en las casillas de la tabla de contingencia corresponden a las *frecuencias observadas*, que a su vez tienen una contraparte *esperada* cuyo cálculo se realiza de acuerdo a la hipótesis nula especificada. Los totales de las frecuencias observadas y esperadas se denominan totales marginales.

Tabla 10.9 Tabla de contingencia de frecuencias observadas para pruebas de independencia

Factor A	Factor B				Sub Total
	B_1	B_2	...	B_c	
A_1	O_{11}	O_{12}	...	O_{1c}	$O_{1.}$
A_2	O_{21}	O_{22}	...	O_{2c}	$O_{2.}$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
A_h	O_{h1}	O_{h2}	...	O_{hc}	$O_{h.}$
Sub Total	$O_{.1}$	$O_{.2}$	...	$O_{.c}$	$O_{..}$

Para calcular las frecuencias esperadas se procede haciendo uso de las frecuencias marginales de la tabla de frecuencias observadas.

Así, para calcular la *frecuencia esperada* de la primera casilla, es decir, E_{11} se hace uso de la fórmula, $E_{11} = \frac{(O_{.1})(O_{1.})}{O_{..}}$, quedando por consiguientes la tabla de frecuencias esperadas como la tabla 10.10

Tabla 10.10 Tabla de contingencia de frecuencias esperadas para pruebas de independencia

Factor A	Factor B				Sub Total
	B_1	B_2	…	B_c	
A_1	E_{11}	E_{12}	…	E_{1c}	$E_{1.}$
A_2	E_{21}	E_{22}	…	E_{2c}	$E_{2.}$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
A_h	E_{h1}	E_{h2}	…	E_{hc}	$E_{h.}$
Sub Total	$O_{.1}$	$O_{.2}$	…	$O_{.c}$	$O_{..}$

Por ejemplo la frecuencia E_{22} se logra mediante la siguiente fórmula:

$$E_{22} = \frac{(O_{.2})(O_{2.})}{O_{..}}$$

Ejemplo 10.8 Se ha recogido información referente al rendimiento alcanzado por un grupo de estudiantes de una escuela secundaria, teniendo en cuenta los niveles de la variable *Síntomas de personalidad*. Los datos se muestran en la tabla 10.11

Tabla 10.11 Frecuencias observadas para Rendimiento y Síntomas de Personalidad de estudiantes de secundaria

Rendimiento escolar	Síntomas de Personalidad				Sub Total
	Neuroticismo	*Ansiedad*	*Consideración*	*Retraimiento*	
8-10	*10*	*20*	*30*	*12*	*72*
11-13	*8*	*25*	*35*	*15*	*83*
14-16	*12*	*28*	*32*	*13*	*85*
17-20	*5*	*15*	*34*	*15*	*69*
Sub Total	35	*88*	*131*	*55*	*309*

En el ejemplo, ¿hay razones para creer que el rendimiento escolar de los alumnos de escuelas secundarias está influidos por los *Síntomas de personalidad* de los propios alumnos? Para comprobar esta proposición hemos escogido al azar 309 estudiantes de la escuela secundaria considerada en el experimento, obteniéndose los resultados que apreciamos en la tabla 10.11.

A continuación calculamos las frecuencias esperadas que se presenta en la tabla 10.12, siguiendo las fórmulas que se ha señalado, como por ejemplo, la proporcionada para el cálculo de la casilla E_{11} *y* E_{22}.

Tabla 10.12 Frecuencias esperadas para Rendimiento y Personalidad de estudiantes de secundaria

Rendimiento escolar(R)	Síntomas de Personalidad(P)				Sub Total
	Neuroticismo	Ansiedad	Consideración	Retraimiento	
8-10	8.16	20.50	30.52	12.82	72
11-13	9.40	23.64	35.19	14.77	83
14-16	9.63	24.21	36.03	15.13	85
17-20	7.81	19.65	29.26	12.28	69
Sub Total	35	88	131	55	309

$E_{11} = \frac{(35)(72)}{309} = 8.16 \quad E_{12} = \frac{(88)(72)}{309} = 20.50 \quad E_{13} = \frac{(131)(72)}{309} = 30.52 \quad E_{14} = \frac{(55)(72)}{309} = 12.82$

$E_{21} = \frac{(35)(83)}{309} = 9.40 \quad E_{22} = \frac{(88)(83)}{309} = 23.64 \quad E_{23} = \frac{(131)(83)}{309} = 35.19 \quad E_{24} = \frac{(55)(83)}{309} = 14.77$

$$E_{31} = \frac{(35)(85)}{309} = 9.63 \quad E_{32} = \frac{(88)(85)}{309} = 24.21 \quad E_{33} = \frac{(131)(85)}{309} = 36.03 \quad E_{34} = \frac{(55)(85)}{309} = 15.13$$

$$E_{41} = \frac{(35)(69)}{309} = 7.81 \quad E_{42} = \frac{(88)(69)}{309} = 19.65 \quad E_{43} = \frac{(131)(69)}{309} = 29.26 \quad E_{44} = \frac{(55)(69)}{309} = 12.28$$

Siguiendo el modelo de la prueba de hipótesis general, la prueba de chi. cuadrado para *independencia* de factores, tiene el siguiente procedimiento:

1º Hipótesis: H_0: $los\ factores\ rendimento\ y\ personalidad\ son\ independientes.$
H_1: $los\ factores\ rendimiento\ y\ personalidad\ no\ son\ independientes.$
2º Nivel de significación: usamos $\alpha = 0.05$
3º Estadístico de prueba:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Que se distribuye como chi-cuadrado con, $(4-1)(4-1) = 9$ grados de libertad

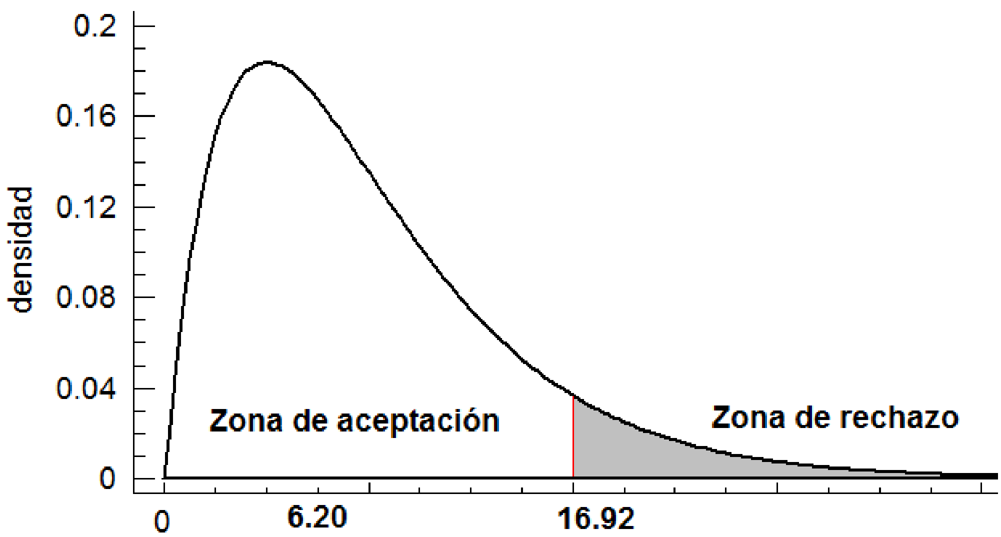
4º La regla de decisión: se rechazará la hipótesis nula si el valor de ${\chi^2}_{calculado}$ es mayor que ${\chi^2}_{(0.05,9)} = 16.92$, realizado los cálculos necesarios, y empleando la ecuación, el valor calculado de chi-cuadrado es: 6.20

$$\chi^2 = \frac{(10-8.16)^2}{8.16} + \frac{(8-9.40)^2}{9.40} + \frac{(12-9.63)^2}{9.63} + \frac{(5-7.81)^2}{7.81} + \cdots + \frac{(12-12.82)^2}{12.82} + \frac{(15-14.77)^2}{14.77} + \frac{(13-15.13)^2}{15.13} + \frac{(15-12.28)^2}{12.28} = 6.20$$

5º Decisión. No rechazar *H₀* puesto que el valor de chi-cuadrado calculado de 6.20, resulta menor que el valor crítico igual a 16.92. Por lo tanto; los niveles de rendimiento escolar logrado por los alumnos de la escuela secundaria considerado en el experimento, parecen no tener relación significativa con los niveles de personalidad.

En la fig. 10.8 se muestra la curva de chi-cuadrado en la cual puede apreciarse que el valor calculado de chi-cuadrado, igual a 6.20, es significativamente menor que el valor tabular, 16.92, por ello no se rechaza la hipótesis nula.

Fig. 10.8 Distribución Chi-cuadrado



10.7.1 Uso de un software estadístico para la prueba de independencia.

La solución de una prueba de independencia se puede llevar a cabo mediante el empleo de paquetes informáticos. En este texto, como se ha venido practicando a lo largo del mismo, usaremos el STATGRAPHICS Centurión. Para la operación del paquete se sigue el orden siguiente.

En la barra de herramientas seleccionar el menú $Analizar \rightarrow Datos\ categóricos \rightarrow Varios\ factores \rightarrow Tabla\ de\ contingencia$. En la ventana correspondiente ingresar los datos de las columnas de acuerdo a los niveles y datos de filas, tal como se observa en los resultados proporcionados por STATGRAPHICS Centurion

Tablas de Contingencia

Columnas de variables:

Neuroticismo

Ansiedad

Consideración

Retraimiento

Número de Observaciones: 309

Número de filas: 4

Número de columnas: 4

El StatAdvisor

Este procedimiento construye diversos estadísticos y gráficas para una tabla de doble entrada. De interés particular son las pruebas de independencia entre filas y columnas, las cuales pueden seleccionarse de la lista de Opciones Tabulares.

Tabla de Frecuencias

	Neuroticismo	Ansiedad	Consideración	Retraimiento	Total por Fila
I	10	20	30	12	72
	8,16%	20,50%	30,52%	12,82%	23,30%
II	8	25	35	15	83
	9,40%	23,64%	35,19%	14,77%	26,86%
II	12	28	32	13	85
	9,63%	24,21%	36,04%	15,13%	27,51%
IV	5	15	34	15	69
	7,82%	19,65%	29,25%	12,28%	22,33%
Total por Columna	35	88	131	55	309

	11,33%	28,48%	42,39%	17,80%	100,00%

Contenido de las celdas:

Frecuencia Observada

Frecuencia Esperada

El StatAdvisor

Esta tabla muestra los recuentos para una tabla de 4 por 4. El primer número en cada celda de la tabla es el recuento ó frecuencia. El segundo número muestra la frecuencia esperada si las clasificaciones de fila y columna fueran independientes. Por ejemplo, hubo 10 valores en la primera fila y primera columna.

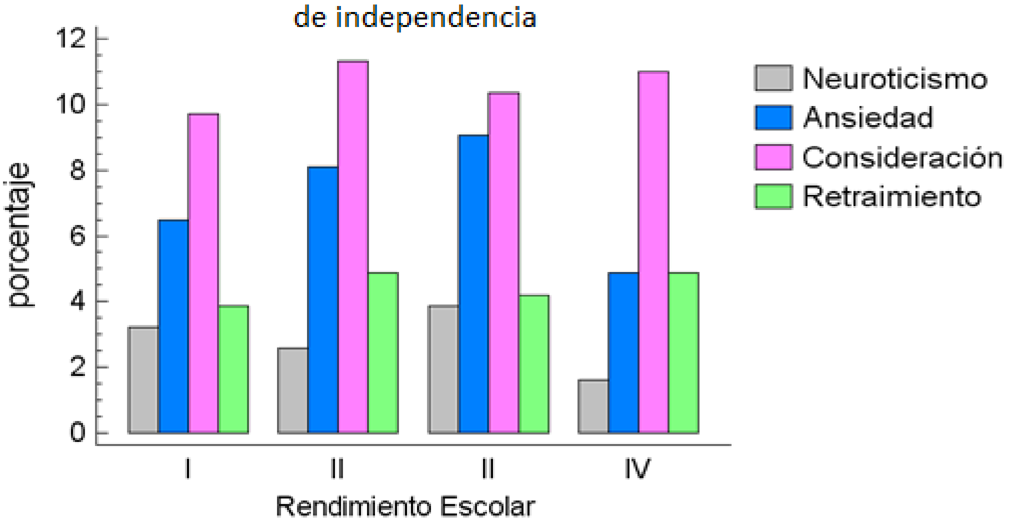
Pruebas de Independencia

Prueba	*Estadístico*	*Gl*	*Valor-P*
Chi-Cuadrada	6,200	9	0,7197

El StatAdvisor

Esta tabla muestra los resultados de la prueba de hipótesis ejecutada para determinar si se rechaza, o no, la idea de que las clasificaciones de fila y columna son independientes. Puesto que el valor-P es mayor o igual que 0,05, no se puede rechazar la hipótesis de qué filas y columnas son independientes con un nivel de confianza del 95,0%. Por lo tanto, la fila observada para un caso en particular, pudiera no tener relación con su columna.

Fig. 10.9 Diagrama de Barras para prueba de independencia



TÉRMINOS CLAVE

Método no paramétrico
Investigación cualitativa
Tablas de contingencia
Distribución multinomial
Bondad de ajuste
Pruebas de independencia
Distribuciones libres
Corridas aleatorias
Rangos
Suma de rangos

Ejercicios propuestos 10.8

1. En un estudio sobre los estilos de crianza en hogares peruanos se ha recogido datos respecto al rendimiento escolar que logran estudiantes de una universidad. Con los datos recogidos, se pide que se pruebe la hipótesis nula, en la que manifiesta que el rendimiento escolar de los estudiantes universitarios es independiente del estilo de crianza de los padres. Usar un $\alpha = 0.01$

Rendimiento escolar	Estilos de crianza		
	Autocrático	Democrático	Permisible
8-10	15	14	30
11-13	8	20	10
14-16	15	21	22
17-20	18	13	21

2. Se ha realizado un estudio en una institución de asistencia social, para averiguar si los *Síntomas de personalidad* en estudiantes de secundaria, está Ligado, a los *Estilos de crianza* a que son sometidos los adolescentes por parte de sus padres. Plantear las hipótesis adecuadas y considerar un nivel de significación del 5% para la prueba.

Síntomas de personalidad	Estilos de crianza		
	Autocrático	Democrático	Permisible
Neuroticismo	20	25	32
Ansiedad	15	13	26
Consideración	30	14	13
Retraimiento	25	19	18

3. La Gerencia central de una empresa grande está interesado en determinar si existe una asociación entre la jornada de trabajo (horas/jornada) de sus empleados y el nivel de estrés relacionado con ciertos casos observados en el trabajo. En un estudio de 262 obreros de la línea de ensamblaje, se reveló lo siguiente:

Jornada de trabajo(horas)	Nivel de Estrés		
	Alto	Moderado	Bajo
Ocho horas	40	20	18
Diez horas	25	15	28
Doce horas	30	50	36

4. Una empresa nacional que vende productos de diferentes líneas; desea determinar si las ventas de sus productos, alcanzadas en un mes, está ligada a grupos generales de clientes. Una muestra aleatoria de 1000 registros de ventas nos proporciona la siguiente información.
Plantear las hipótesis adecuadas con un nivel de $\alpha = 0.01$. Extraer sus conclusiones.

Venta de Productos	Grupo de clientes			
	Empresarios	Obreros	Profesionales	Agricultores
Lavadoras	50	50	55	35
Lap Top	50	48	39	29
Equip sonido	58	65	25	44
Refrigerador	60	50	55	42
Televisor	85	60	70	30

5. Para comparar si el estilo de crianza de adolescentes está relacionado con el lugar de su residencia, se escogen al azar 500 niños menores de 15 años. Los datos se muestran en la tabla siguiente.

Estilo de crianza	Lugar de residencia			
	Cercado	Distrito grande	Suburbio	Distrito rural
Autocrático	32	40	35	35
Democrático	36	44	41	50
Permisible	38	40	45	64

Usar un nivel de $\alpha = 0.05$, y manifestar sus conclusiones.¿Las variables estilo de crianza y lugar de residencia son independientes?

6. Se realizó un estudio en una empresa transnacional para determinar si la calificación de *desempeño* en la empresa es independiente de los logros académicos alcanzados en la universidad. Se seleccionó al azar una muestra de 193 empleados de la empresa. Realizar la prueba de independencia, usando un nivel de significación del 0.05.¿El desempeño en la empresa está relacionada con los logros alcanzados en la universidad?. Los datos se muestran a continuación.

Desempeño en la empresa	Rendimiento en universidad			
	A	B	C	D
Excelente	20	25	6	9
Bueno	15	12	10	4
Regular	30	15	5	6
Malo	8	16	7	5

A= Notable D= Malo

7. Se realizó una encuesta a ciudadanos referente a sus ingresos anuales y el tipo de relación laboral, revelando lo siguiente:

	Tipo de Relación Laboral			
Ingresos(soles)	Independiente	Mypes	Pymes	Grandes
$<$ 40 000	40	30	25	50
40 000-70 999	25	35	15	45
$>$ 80 000	15	20	30	35

Responder a la pregunta: ¿Existe relación entre el tipo de *relación laboral* de los ciudadanos y el nivel de su *ingreso* anual registrado? Realizar la prueba empleando un nivel de significación del 0.01

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bartlett, M.S.(1937) Properties of Sufficiency and Statistical test. Proc. Ray. Soc. A160:268-282

2. Bartlett, M.S.(1957b). Some examples of statistical Methods of research in agricuxulture and applied biology. J. Ray. Atat. Soc. Supp. 4:137-183

3. Berenson, M y D. Levine (1991), Estadística Básica en Administración, Conceptos y Aplicaciones.

4. Cochran and Cox (1995) Diseños Experimentales. A.I.D. México, D.F.

5. Descartes, René. Discurso del método. segundo título o indicación al título principal *Discours de la methode. Pour bien conduire la raison & chercher*

6. Gutiérrez S. Raúl (2006). Introducción al Método científico. Decimoctava edición, editorial Esfinge, México.

7. Hartley, H.O.(1950) The máximum F-ratio as a short-cut test for heterogeneity of variance. Biometrika. 37:308-312.

8. Klimovsky, Gregorio (1997) Las desventuras del conocimiento científico. Una introducción a la epistemología, A-Z editora, Bs.As., ISBN, 950-534-275-6

9. Laird, R.J. and F.B. Cady. (1969). Combined Analysis of Yield Data From Fertilizer experiments. Agron. Jour. November 1969 61:829-834

10. Le Clerg, Leonard and Clarx. Field(1962) Plot Techniques, Burgess Publishing Company 2th edition. Minneapolis.

11. Lentner M. And Bishop T. (1986). Experimental design and analysis. Valley Book Company, Blacksburg. 565 p.

12. Litle, Thomas y Jackson Hills (1975). Métodos Estadístico para la Investigación en la Agricultura. Editorial Trillas S.A, México

13. Littell, R.C., Milliken, G. A., Stroup, W. W. And Wolfinger, R. D. (1996). SAS® System for Mixed Models. SAS Institute Inc, Cary, NC. 633p.

14. *Método* en Diccionario de Filosofía J. Ferrater Mora, Ariel, Barcelona, (1994), ISBN 84-344-0500-8, p. 2402

15. Milton, J. S, J.O. Tsokos (1989). Estadística para Biología y Ciencias de la Salud. Madrid: Interamericana−McGraw Hill

16. Montgomery, Douglas C. (1991). Diseño y Análisis de Experimentos. Iberoamericana, México, D.F. 589 p.

17. Pacheco, J. J (1962). Sobre la información suministrada por los diseños utilizados en el Centro de Investigaciones Agronómicas. III Jornadas Agronómicas. MAC. CIA. 14 p.

18. Panse y Sukhatme (1959). Métodos Estadísticos para Investigadores Agrícolas. México. Fondo de Cultura económica.

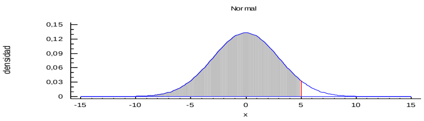
19. Ruiz L. Ramón.: (2006). Historia y Evolución del Pensamiento Científico. Http: //www.monografias.com/trabajos-pdf/historia-pensamientocientifico/historia-pensamiento-cientifico.shtml, en línea a partir de 28, Marzo 2007, primera versión en español e inglés.

20. Soto N., E (1963). Eficiencia de Diseños Experimentales en Maíz. MAC. CIA. Boletín Técnico N~ 17. 24 p.

21. Stell and Torrie (1960). Principles and Procedures of statistics. New York. Mc Graw. Hill, 481 p.

ANEXOS

ANEXO A: Distribución Normal

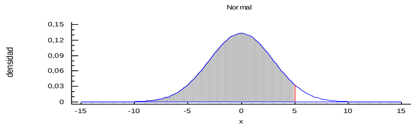


$P(Z < -z_0) = \alpha$

$P(Z < -1.78) = 0.03754$

z Normal	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-4,0	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002
-3,9	0,00005	0,00005	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00003	0,00003
-3,8	0,00007	0,00007	0,00007	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005
-3,7	0,00011	0,00010	0,00010	0,00010	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00008
-3,6	0,00016	0,00015	0,00015	0,00014	0,00014	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011
-3,5	0,00023	0,00022	0,00022	0,00021	0,00020	0,00019	0,00019	0,00018	0,00017	0,00017
-3,4	0,00034	0,00032	0,00031	0,00030	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024
-3,3	0,00048	0,00047	0,00045	0,00043	0,00042	0,00040	0,00039	0,00038	0,00036	0,00035
-3,2	0,00069	0,00066	0,00064	0,00062	0,00060	0,00058	0,00056	0,00054	0,00052	0,00050
-3,1	0,00097	0,00094	0,00090	0,00087	0,00084	0,00082	0,00079	0,00076	0,00074	0,00071
-3,0	0,00135	0,00131	0,00126	0,00122	0,00118	0,00114	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100
-2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139
-2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
-2,7	0,00347	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
-2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
-2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
-2,4	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
-2,3	0,01072	0,01044	0,01017	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
-2,2	0,01390	0,01355	0,01321	0,01287	0,01255	0,01222	0,01191	0,01160	0,01130	0,01101
-2,1	0,01786	0,01743	0,01700	0,01659	0,01618	0,01578	0,01539	0,01500	0,01463	0,01426
-2,0	0,02275	0,02222	0,02169	0,02118	0,02068	0,02018	0,01970	0,01923	0,01876	0,01831
-1,9	0,02872	0,02807	0,02743	0,02680	0,02619	0,02559	0,02500	0,02442	0,02385	0,02330
-1,8	0,03593	0,03515	0,03438	0,03362	0,03288	0,03216	0,03144	0,03074	0,03005	0,02938
-1,7	0,04457	0,04363	0,04272	0,04182	0,04093	0,04006	0,03920	0,03836	**0,03754**	0,03673
-1,6	0,05480	0,05370	0,05262	0,05155	0,05050	0,04947	0,04846	0,04746	0,04648	0,04551
-1,5	0,06681	0,06552	0,06426	0,06301	0,06178	0,06057	0,05938	0,05821	0,05705	0,05592
-1,4	0,08076	0,07927	0,07780	0,07636	0,07493	0,07353	0,07215	0,07078	0,06944	0,06811
-1,3	0,09680	0,09510	0,09342	0,09176	0,09012	0,08851	0,08692	0,08534	0,08379	0,08226
-1,2	0,11507	0,11314	0,11123	0,10935	0,10749	0,10565	0,10383	0,10204	0,10027	0,09853
-1,1	0,13567	0,13350	0,13136	0,12924	0,12714	0,12507	0,12302	0,12100	0,11900	0,11702
-1,0	0,15866	0,15625	0,15386	0,15151	0,14917	0,14686	0,14457	0,14231	0,14007	0,13786
-0,9	0,18406	0,18141	0,17879	0,17619	0,17361	0,17106	0,16853	0,16602	0,16354	0,16109
-0,8	0,21186	0,20897	0,20611	0,20327	0,20045	0,19766	0,19489	0,19215	0,18943	0,18673
-0,7	0,24196	0,23885	0,23576	0,23270	0,22965	0,22663	0,22363	0,22065	0,21770	0,21476
-0,6	0,27425	0,27093	0,26763	0,26435	0,26109	0,25785	0,25463	0,25143	0,24825	0,24510
-0,5	0,30854	0,30503	0,30153	0,29806	0,29460	0,29116	0,28774	0,28434	0,28096	0,27760
-0,4	0,34458	0,34090	0,33724	0,33360	0,32997	0,32636	0,32276	0,31918	0,31561	0,31207
-0,3	0,38209	0,37828	0,37448	0,37070	0,36693	0,36317	0,35942	0,35569	0,35197	0,34827
-0,2	0,42074	0,41683	0,41294	0,40905	0,40517	0,40129	0,39743	0,39358	0,38974	0,38591
-0,1	0,46017	0,45620	0,45224	0,44828	0,44433	0,44038	0,43644	0,43251	0,42858	0,42465
0,0	0,50000	0,49601	0,49202	0,48803	0,48405	0,48006	0,47608	0,47210	0,46812	0,46414

ANEXO A: Distribución Normal



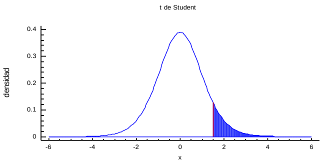
$P(Z < z_0) = \alpha$

$P(Z < 1.78) = 0.96246$

---

z Normal	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	**0,96246**	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,9761	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

ANEXO B: Tabla t de Student

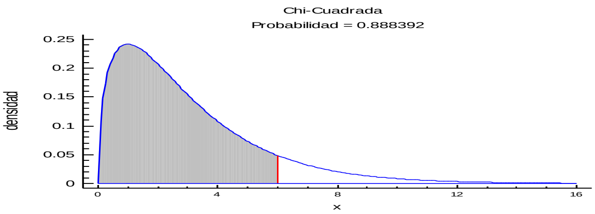


Contiene los valores *t* tales que $p[T > t] = \alpha$,

donde *n* son los grados de libertad.

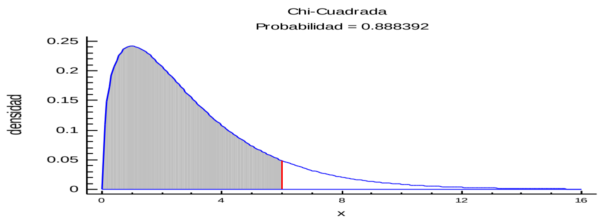
$n \setminus \alpha$	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025
1	0,7265	1,0000	1,3764	3,0777	6,3137	12,7062	31,821	63,6559	127,3213
2	0,6172	0,8165	1,0607	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250	14,0890
3	0,5844	0,7649	0,9785	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408	7,4533
4	0,5686	0,7407	0,9410	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041	5,5976
5	0,5594	0,7267	0,9195	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	4,7733
6	0,5534	0,7176	0,9057	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	4,3168
7	0,5491	0,7111	0,8960	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995	4,0293
8	0,5459	0,7064	0,8889	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	3,8325
9	0,5435	0,7027	0,8834	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897
10	0,5415	0,6998	0,8791	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814
11	0,5399	0,6974	0,8755	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	3,4966
12	0,5386	0,6955	0,8726	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,4284
13	0,5375	0,6938	0,8702	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,3725
14	0,5366	0,6924	0,8681	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,3257
15	0,5357	0,6912	0,8662	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467	3,2860
16	0,5350	0,6901	0,8647	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,2520
17	0,5344	0,6892	0,8633	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,2224
18	0,5338	0,6884	0,8620	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,1966
19	0,5333	0,6876	0,8610	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737
20	0,5329	0,6870	0,8600	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,1534
21	0,5325	0,6864	0,8591	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,1352
22	0,5321	0,6858	0,8583	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188
23	0,5317	0,6853	0,8575	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,1040
24	0,5314	0,6848	0,8569	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970	3,0905,
25	0,5312	0,6844	0,8562	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782
26	0,5309	0,6840	0,8557	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,0669
27	0,5306	0,6837	0,8551	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,0565
28	0,5304	0,6834	0,8546	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469
29	0,5302	0,6830	0,8542	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,0380
30	0,5300	0,6828	0,8538	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,0298
40	0,5286	0,6807	0,8507	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	2,9712
80	0,5265	0,6776	0,8461	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	2,8870
120	0,5258	0,6765	0,8446	1,2886	1,6576	1,9799	2,3578	2,6174	2,8599
∞	0,5244	0,6745	0,8416	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	2,8070

ANEXO C: Tabla de distribución ji – cuadrado(1)



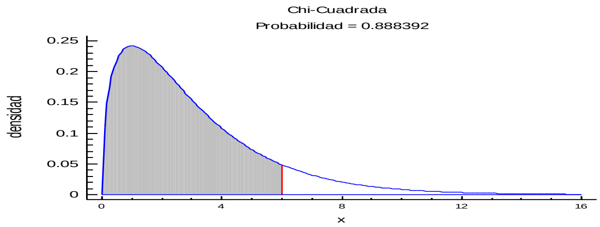
Grados de Libertad	Probabilidad acumulada										
	0.0005	0.001	0.0025	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.036	0.064	0.102
2	0.001	0.002	0.005	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.325	0.446	0.575
3	0.015	0.024	0.045	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	0.798	1.005	1.213
4	0.064	0.091	0.145	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.366	1.649	1.923
5	0.158	0.210	0.307	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	1.994	2.343	2.675
6	0.299	0.381	0.527	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	2.661	3.070	3.455
7	0.485	0.598	0.794	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.358	3.822	4.255
8	0.710	0.857	1.104	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	4.078	4.594	5.071
9	0.972	1.152	1.450	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	4.817	5.380	5.899
10	1.265	1.479	1.827	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	5.570	6.179	6.737
11	1.587	1.834	2.232	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	6.336	6.989	7.584
12	1.934	2.214	2.661	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	7.114	7.807	8.438
13	2.305	2.617	3.112	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	7.901	8.634	9.299
14	2.697	3.041	3.582	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	8.696	9.467	10.17
15	3.108	3.483	4.070	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	9.499	10.31	11.04
16	3.536	3.942	4.573	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	10.31	11.15	11.91
17	3.980	4.416	5.092	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	11.12	12.00	12.79
18	4.439	4.905	5.623	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	11.95	12.86	13.68
19	4.912	5.407	6.167	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	12.77	13.72	14.56
20	5.398	5.921	6.723	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	13.60	14.58	15.45
21	5.896	6.447	7.289	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	14.44	15.44	16.34
22	6.404	6.983	7.865	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	15.28	16.31	17.24
23	6.924	7.529	8.450	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	16.12	17.19	18.14
24	7.453	8.085	9.044	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	16.97	18.06	19.04
25	7.991	8.649	9.646	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	17.82	18.94	19.94
26	8.538	9.222	10.26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	18.67	19.82	20.84
27	9.093	9.803	10.87	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	19.53	20.70	21.75
28	9.656	10.39	11.50	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	20.39	21.59	22.66
29	10.23	10.99	12.13	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	21.25	22.48	23.57
30	10.80	11.59	12.76	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	22.11	23.36	24.48
35	13.79	14.69	16.03	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	26.46	27.84	29.05
40	16.91	17.92	19.42	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	30.86	32.34	33.66
45	20.14	21.25	22.90	24.31	25.90	28.37	30.61	33.35	35.29	36.88	38.29
50	23.46	24.67	26.46	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	39.75	41.45	42.94
55	26.87	28.17	30.10	31.73	33.57	36.40	38.96	42.06	44.24	46.04	47.61
60	30.34	31.74	33.79	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	48.76	50.64	52.29
65	33.88	35.36	37.54	39.38	41.44	44.60	47.45	50.88	53.29	55.26	56.99
70	37.47	39.04	41.33	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	57.84	59.90	61.70
75	41.11	42.76	45.17	47.21	49.48	52.94	56.05	59.79	62.41	64.55	66.42
80	44.79	46.52	49.04	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	66.99	69.21	71.14
85	48.52	50.32	52.95	55.17	57.63	61.39	64.75	68.78	71.59	73.88	75.88
90	52.28	54.16	56.89	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	76.20	78.56	80.62
95	56.07	58.02	60.86	63.25	65.90	69.92	73.52	77.82	80.81	83.25	85.38
100	59.90	61.92	64.86	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	85.44	87.95	90.13
110	67.63	69.79	72.92	75.55	78.46	82.87	86.79	91.47	94.72	97.36	99.67
120	75.47	77.76	81.07	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	104.0	106.8	109.2
200	140.7	143.8	148.4	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	179.4	183.0	186.2

ANEXO C : Tabla de Distribución ji - cuadrado (2)



Grados de Libertad	Probabilidad acumulada									
0.300	0.350	0.400	0.450	0.500	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750	
1	0.148	0.206	0.275	0.357	0.455	0.571	0.708	0.873	1.074	1.323
2	0.713	0.862	1.022	1.196	1.386	1.597	1.833	2.100	2.408	2.773
3	1.424	1.642	1.869	2.109	2.366	2.643	2.946	3.283	3.665	4.108
4	2.195	2.470	2.753	3.047	3.357	3.687	4.045	4.438	4.878	5.385
5	3.000	3.325	3.655	3.996	4.351	4.728	5.132	5.573	6.064	6.626
6	3.828	4.197	4.570	4.952	5.348	5.765	6.211	6.695	7.231	7.841
7	4.671	5.082	5.493	5.913	6.346	6.800	7.283	7.806	8.383	9.037
8	5.527	5.975	6.423	6.877	7.344	7.833	8.351	8.909	9.524	10.22
9	6.393	6.876	7.357	7.843	8.343	8.863	9.414	10.01	10.66	11.39
10	7.267	7.783	8.295	8.812	9.342	9.892	10.47	11.10	11.78	12.55
11	8.148	8.695	9.237	9.783	10.34	10.92	11.53	12.18	12.90	13.70
12	9.034	9.612	10.18	10.76	11.34	11.95	12.58	13.27	14.01	14.85
13	9.926	10.53	11.13	11.73	12.34	12.97	13.64	14.35	15.12	15.98
14	10.82	11.45	12.08	12.70	13.34	14.00	14.69	15.42	16.22	17.12
15	11.72	12.38	13.03	13.68	14.34	15.02	15.73	16.49	17.32	18.25
16	12.62	13.31	13.98	14.66	15.34	16.04	16.78	17.56	18.42	19.37
17	13.53	14.24	14.94	15.63	16.34	17.06	17.82	18.63	19.51	20.49
18	14.44	15.17	15.89	16.61	17.34	18.09	18.87	19.70	20.60	21.60
19	15.35	16.11	16.85	17.59	18.34	19.11	19.91	20.76	21.69	22.72
20	16.27	17.05	17.81	18.57	19.34	20.13	20.95	21.83	22.77	23.83
21	17.18	17.98	18.77	19.55	20.34	21.15	21.99	22.89	23.86	24.93
22	18.10	18.92	19.73	20.53	21.34	22.17	23.03	23.95	24.94	26.04
23	19.02	19.87	20.69	21.51	22.34	23.19	24.07	25.01	26.02	27.14
24	19.94	20.81	21.65	22.49	23.34	24.20	25.11	26.06	27.10	28.24
25	20.87	21.75	22.62	23.47	24.34	25.22	26.14	27.12	28.17	29.34
26	21.79	22.70	23.58	24.45	25.34	26.24	27.18	28.17	29.25	30.43
27	22.72	23.64	24.54	25.44	26.34	27.26	28.21	29.23	30.32	31.53
28	23.65	24.59	25.51	26.42	27.34	28.27	29.25	30.28	31.39	32.62
29	24.58	25.54	26.48	27.40	28.34	29.29	30.28	31.33	32.46	33.71
30	25.51	26.49	27.44	28.39	29.34	30.31	31.32	32.38	33.53	34.80
35	30.18	31.25	32.28	33.31	34.34	35.39	36.47	37.62	38.86	40.22
40	34.87	36.02	37.13	38.23	39.34	40.46	41.62	42.85	44.16	45.62
45	39.58	40.81	42.00	43.16	44.34	45.53	46.76	48.06	49.45	50.98
50	44.31	45.61	46.86	48.10	49.33	50.59	51.89	53.26	54.72	56.33
55	49.06	50.42	51.74	53.04	54.33	55.65	57.02	58.45	59.98	61.66
60	53.81	55.24	56.62	57.98	59.33	60.71	62.13	63.63	65.23	66.98
65	58.57	60.07	61.51	62.92	64.33	65.77	67.25	68.80	70.46	72.28
70	63.35	64.90	66.40	67.87	69.33	70.82	72.36	73.97	75.69	77.58
75	68.13	69.74	71.29	72.81	74.33	75.88	77.46	79.13	80.91	82.86
80	72.92	74.58	76.19	77.76	79.33	80.93	82.57	84.28	86.12	88.13
85	77.71	79.43	81.09	82.71	84.33	85.98	87.67	89.43	91.32	93.39
90	82.51	84.29	85.99	87.67	89.33	91.02	92.76	94.58	96.52	98.65
95	87.32	89.14	90.90	92.62	94.33	96.07	97.85	99.72	101.7	103.9
100	92.13	94.00	95.81	97.57	99.33	101.1	102.9	104.9	106.9	109.1
110	101.8	103.7	105.6	107.5	109.3	111.2	113.1	115.1	117.3	119.6
120	111.4	113.5	115.5	117.4	119.3	121.3	123.3	125.4	127.6	130.1
200	189.0	191.7	194.3	196.8	199.3	201.9	204.4	207.1	210.0	213.1

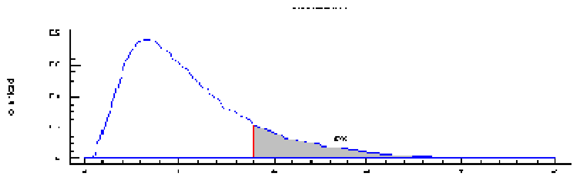
ANEXO C: Tabla de Distribución Ji-cuadrado (3)



Grados de Libertad				Probabilidad acumulada						
0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.998	0.999	0.9995	
1	1.642	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	9.141	10.83	12.12
2	3.219	3.794	4.606	5.992	7.379	9.214	10.60	12.00	13.85	15.27
3	4.642	5.317	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	14.32	16.27	17.73
4	5.989	6.745	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	16.42	18.47	20.00
5	7.289	8.115	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	18.39	20.52	22.11
6	8.558	9.446	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	20.25	22.46	24.10
7	9.803	10.75	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	22.04	24.32	26.02
8	11.03	12.03	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	23.77	26.12	27.87
9	12.24	13.29	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	25.46	27.88	29.67
10	13.44	14.53	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	27.11	29.59	31.42
11	14.63	15.77	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	28.73	31.26	33.14
12	15.81	16.99	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	30.32	32.91	34.82
13	16.98	18.20	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	31.88	34.53	36.48
14	18.15	19.41	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	33.43	36.12	38.11
15	19.31	20.60	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	34.95	37.70	39.72
16	20.47	21.79	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	36.46	39.25	41.31
17	21.61	22.98	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	37.95	40.79	42.88
18	22.76	24.16	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	39.42	42.31	44.43
19	23.90	25.33	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	40.88	43.82	45.97
20	25.04	26.50	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	42.34	45.31	47.50
21	26.17	27.66	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	43.78	46.80	49.01
22	27.30	28.82	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	45.20	48.27	50.51
23	28.43	29.98	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	46.62	49.73	52.00
24	29.55	31.13	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	48.03	51.18	53.48
25	30.68	32.28	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	49.44	52.62	54.95
26	31.79	33.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	50.83	54.05	56.41
27	32.91	34.57	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	52.22	55.48	57.86
28	34.03	35.71	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	53.59	56.89	59.30
29	35.14	36.85	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	54.97	58.30	60.73
30	36.25	37.99	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	56.33	59.70	62.16
35	41.78	43.64	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27	63.08	66.62	69.20
40	47.27	49.24	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	69.70	73.40	76.09
45	52.73	54.81	57.51	61.66	65.41	69.96	73.17	76.22	80.08	82.88
50	58.16	60.35	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	82.66	86.66	89.56
55	63.58	65.86	68.80	73.31	77.38	82.29	85.75	89.03	93.17	96.16
60	68.97	71.34	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	95.34	99.61	102.7
65	74.35	76.81	79.97	84.82	89.18	94.42	98.11	101.6	106.0	109.2
70	79.71	82.26	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	107.8	112.3	115.6
75	85.07	87.69	91.06	96.22	100.8	106.4	110.3	114.0	118.6	121.9
80	90.41	93.11	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3	120.1	124.8	128.3
85	95.73	98.51	102.1	107.5	112.4	118.2	122.3	126.2	131.0	134.5
90	101.1	103.9	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	132.3	137.2	140.8
95	106.4	109.3	113.0	118.8	123.9	130.0	134.2	138.3	143.3	147.0
100	111.7	114.7	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	144.3	149.4	153.2
110	122.2	125.4	129.4	135.5	140.9	147.4	151.9	156.2	161.6	165.4
120	132.8	136.1	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6	168.1	173.6	177.6
200	216.6	220.7	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3	260.7	267.5	272.4

ANEXO D

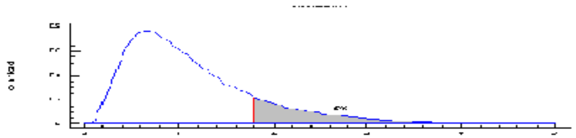
Valores Críticos Superiores de la Distribución de F
para v_1 grados de libertad del numerador y v_2 grados de libertad del denominador 5% significance level



v_1 / v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.882	240.543	241.882	242.983	243.906	244.690	245.364
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396	19.405	19.413	19.419	19.424
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.763	8.745	8.729	8.715
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.936	5.912	5.891	5.873
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.704	4.678	4.655	4.636
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	4.027	4.000	3.976	3.956
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.603	3.575	3.550	3.529
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	3.313	3.284	3.259	3.237
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.102	3.073	3.048	3.025
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.943	2.913	2.887	2.865
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.818	2.788	2.761	2.739
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.717	2.687	2.660	2.637
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.635	2.604	2.577	2.554
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.565	2.534	2.507	2.484
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.507	2.475	2.448	2.424
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.310	2.278	2.250	2.225
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.126	2.092	2.063	2.037
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	2.038	2.003	1.974	1.948
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026	1.986	1.952	1.921	1.895
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.952	1.917	1.887	1.860
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969	1.928	1.893	1.863	1.836
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951	1.910	1.875	1.845	1.817
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927	1.886	1.850	1.819	1.792

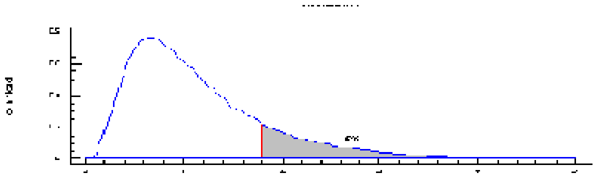
ANEXO D

Valores Críticos Superiores de la Distribución de F
para v_1 grados de libertad del numerador y v_2 grados de libertad del denominador 10% significance level



v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	39.863	49.500	53.593	55.833	57.240	58.204	58.906	59.439	59.858	60.195	60.473	60.705	60.903	61.073
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392	9.401	9.408	9.415	9.420
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230	5.222	5.216	5.210	5.205
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920	3.907	3.896	3.886	3.878
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297	3.282	3.268	3.257	3.247
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937	2.920	2.905	2.892	2.881
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703	2.684	2.668	2.654	2.643
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538	5.734	5.667	5.609	5.559
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416	5.178	5.111	5.055	5.005
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323	4.772	4.706	4.650	4.601
11	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248	4.462	4.397	4.342	4.293
12	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188	4.220	4.155	4.100	4.052
13	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138	4.025	3.960	3.905	3.857
14	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095	3.864	3.800	3.745	3.698
15	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059	3.730	3.666	3.612	3.564
20	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937	3.294	3.231	3.177	3.130
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.305	3.173	3.067	2.979	2.906	2.843	2.789	2.742
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.727	2.665	2.611	2.563
50	7.171	5.057	4.199	3.720	3.408	3.186	3.020	2.890	2.785	2.698	2.625	2.562	2.508	2.461
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.559	2.496	2.442	2.394
70	7.011	4.922	4.074	3.600	3.291	3.071	2.906	2.777	2.672	2.585	2.512	2.450	2.395	2.348
80	6.963	4.881	4.036	3.563	3.255	3.036	2.871	2.742	2.637	2.551	2.478	2.415	2.361	2.313
100	6.895	4.824	3.984	3.513	3.206	2.988	2.823	2.694	2.590	2.503	2.430	2.368	2.313	2.265

ANEXO D



Valores Críticos Superiores de la Distribución de F
para v_1 grados de libertad del numerador y v_2 grados de libertad del denominador
1% significance level

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	4052.19	4999.52	5403.34	5624.62	5763.65	5858.97	5928.33	5981.10	6022.50	6055.85	6083.35	6106.35	6125.86	6142.70
2	98.502	99.000	99.166	99.249	99.300	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399	99.408	99.416	99.422	99.428
3	34.116	30.816	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229	27.133	27.052	26.983	26.924
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.452	14.374	14.307	14.249
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.963	9.888	9.825	9.770
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.790	7.718	7.657	7.605
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.538	6.469	6.410	6.359
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.734	5.667	5.609	5.559
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.178	5.111	5.055	5.005
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.772	4.706	4.650	4.601
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.462	4.397	4.342	4.293
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.220	4.155	4.100	4.052
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	4.025	3.960	3.905	3.857
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.864	3.800	3.745	3.698
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.730	3.666	3.612	3.564
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.294	3.231	3.177	3.130
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.305	3.173	3.067	2.979	2.906	2.843	2.789	2.742
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.727	2.665	2.611	2.563
50	7.171	5.057	4.199	3.720	3.408	3.186	3.020	2.890	2.785	2.698	2.625	2.562	2.508	2.461
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.559	2.496	2.442	2.394
70	7.011	4.922	4.074	3.600	3.291	3.071	2.906	2.777	2.672	2.585	2.512	2.450	2.395	2.348
80	6.963	4.881	4.036	3.563	3.255	3.036	2.871	2.742	2.637	2.551	2.478	2.415	2.361	2.313
100	6.895	4.824	3.984	3.513	3.206	2.988	2.823	2.694	2.590	2.503	2.430	2.368	2.313	2.265

ANEXO E

Valores para la distribución de Tukey

$q_{0.01}(p, f)$

f	p = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	13.90	19.02	22.56	25.37	27.76	29.86	31.73	33.41	34.93	36.29	37.53	38.66	39.70	40.66
3	8.26	10.62	12.17	13.32	14.24	15.00	15.65	16.21	16.71	17.16	17.57	17.95	18.29	18.62
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.54	11.92	12.26	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53
5	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.48	9.65	9.81	9.95
7	4.95	5.92	6.54	7.00	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12
8	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.49	7.60	7.71	7.81
11	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56
12	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05
15	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93
16	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.28	6.37	6.45	6.52
21	4.00	4.61	4.99	5.26	5.47	5.65	5.79	5.92	6.04	6.14	6.23	6.32	6.39	6.47
22	3.99	4.59	4.96	5.22	5.43	5.61	5.75	5.88	5.99	6.10	6.19	6.27	6.35	6.42
23	3.97	4.57	4.93	5.20	5.40	5.57	5.72	5.84	5.95	6.05	6.14	6.23	6.30	6.37
24	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33
25	3.94	4.53	4.89	5.14	5.35	5.51	5.65	5.78	5.89	5.98	6.07	6.15	6.22	6.29
26	3.93	4.51	4.87	5.12	5.32	5.49	5.63	5.75	5.86	5.95	6.04	6.12	6.19	6.26
27	3.92	4.49	4.85	5.10	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.92	6.01	6.09	6.16	6.22
28	3.91	4.48	4.83	5.08	5.28	5.44	5.58	5.70	5.80	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20
29	3.90	4.47	4.81	5.06	5.26	5.42	5.56	5.67	5.78	5.87	5.96	6.03	6.10	6.17
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14
31	3.88	4.44	4.79	5.03	5.23	5.38	5.52	5.63	5.74	5.83	5.91	5.99	6.05	6.12
32	3.87	4.43	4.77	5.02	5.21	5.37	5.50	5.61	5.72	5.81	5.89	5.96	6.03	6.10
33	3.87	4.42	4.76	5.00	5.20	5.35	5.48	5.60	5.70	5.79	5.87	5.94	6.01	6.08
34	3.86	4.41	4.75	4.99	5.18	5.34	5.47	5.58	5.68	5.77	5.85	5.93	5.99	6.06
35	3.85	4.40	4.74	4.98	5.17	5.32	5.45	5.57	5.67	5.75	5.84	5.91	5.98	6.04
36	3.85	4.40	4.73	4.97	5.16	5.31	5.44	5.55	5.65	5.74	5.82	5.89	5.96	6.02
37	3.84	4.39	4.72	4.96	5.15	5.30	5.43	5.54	5.64	5.72	5.80	5.88	5.94	6.00
38	3.83	4.38	4.71	4.95	5.13	5.29	5.41	5.53	5.62	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99
39	3.83	4.37	4.70	4.94	5.12	5.28	5.40	5.51	5.61	5.70	5.78	5.85	5.91	5.97
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69	5.76	5.83	5.90	5.96
41	3.82	4.36	4.69	4.92	5.11	5.26	5.38	5.49	5.59	5.67	5.75	5.82	5.89	5.95
42	3.82	4.35	4.68	4.91	5.10	5.25	5.37	5.48	5.58	5.66	5.74	5.81	5.88	5.94
43	3.81	4.35	4.67	4.91	5.09	5.24	5.36	5.47	5.57	5.65	5.73	5.80	5.86	5.92
44	3.81	4.34	4.67	4.90	5.08	5.23	5.35	5.46	5.56	5.64	5.72	5.79	5.85	5.91
45	3.80	4.34	4.66	4.89	5.07	5.22	5.34	5.45	5.55	5.63	5.71	5.78	5.84	5.90
46	3.80	4.33	4.66	4.89	5.07	5.21	5.34	5.44	5.54	5.62	5.70	5.77	5.83	5.89
47	3.80	4.33	4.65	4.88	5.06	5.21	5.33	5.44	5.53	5.61	5.69	5.76	5.82	5.88
48	3.79	4.32	4.64	4.87	5.05	5.20	5.32	5.43	5.52	5.61	5.68	5.75	5.81	5.87
49	3.79	4.32	4.64	4.87	5.05	5.19	5.31	5.42	5.51	5.60	5.67	5.74	5.80	5.86
50	3.79	4.32	4.63	4.86	5.04	5.19	5.31	5.41	5.51	5.59	5.67	5.73	5.80	5.85

ANEXO E

Valores para la distribución de Tukey

$q_{0.01}(p, f)$

	p													
f	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
2	41.54	42.36	43.13	43.85	44.53	45.16	45.77	46.34	46.89	47.40	47.90	48.37	48.83	49.26
3	18.91	19.20	19.46	19.71	19.95	20.17	20.39	20.59	20.79	20.98	21.16	21.33	21.50	21.66
4	13.72	13.91	14.08	14.24	14.39	14.53	14.67	14.80	14.92	15.04	15.16	15.26	15.37	15.47
5	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93	12.05	12.16	12.26	12.36	12.45	12.54	12.63	12.71	12.79
6	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54	10.64	10.73	10.82	10.90	10.98	11.06	11.13	11.20	11.27
7	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65	9.73	9.82	9.89	9.97	10.04	10.11	10.18	10.24	10.30
8	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03	9.11	9.18	9.25	9.32	9.39	9.45	9.51	9.57	9.62
9	8.23	8.33	8.41	8.49	8.57	8.65	8.72	8.78	8.85	8.91	8.97	9.02	9.08	9.13
10	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23	8.29	8.36	8.42	8.48	8.54	8.60	8.65	8.70	8.75
11	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95	8.02	8.08	8.14	8.20	8.25	8.30	8.35	8.40	8.45
12	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73	7.79	7.85	7.91	7.96	8.02	8.07	8.11	8.16	8.20
13	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55	7.61	7.67	7.72	7.77	7.82	7.87	7.92	7.96	8.00
14	7.13	7.20	7.27	7.33	7.39	7.45	7.51	7.56	7.61	7.66	7.71	7.75	7.79	7.83
15	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26	7.32	7.37	7.43	7.47	7.52	7.57	7.61	7.65	7.69
16	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15	7.21	7.26	7.31	7.36	7.40	7.44	7.49	7.53	7.57
17	6.81	6.87	6.94	7.00	7.05	7.11	7.16	7.21	7.25	7.30	7.34	7.38	7.42	7.46
18	6.73	6.79	6.85	6.91	6.97	7.02	7.07	7.12	7.16	7.21	7.25	7.29	7.32	7.36
19	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89	6.94	6.99	7.04	7.08	7.12	7.17	7.20	7.24	7.28
20	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82	6.87	6.92	6.97	7.01	7.05	7.09	7.13	7.17	7.20
21	6.53	6.60	6.65	6.71	6.76	6.81	6.86	6.90	6.95	6.99	7.03	7.06	7.10	7.14
22	6.48	6.54	6.60	6.66	6.71	6.76	6.80	6.85	6.89	6.93	6.97	7.00	7.04	7.07
23	6.44	6.50	6.55	6.61	6.66	6.71	6.75	6.79	6.84	6.88	6.91	6.95	6.99	7.02
24	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61	6.66	6.70	6.75	6.79	6.83	6.86	6.90	6.94	6.97
25	6.35	6.41	6.47	6.52	6.57	6.62	6.66	6.70	6.74	6.78	6.82	6.86	6.89	6.92
26	6.32	6.38	6.43	6.48	6.53	6.58	6.62	6.66	6.70	6.74	6.78	6.81	6.85	6.88
27	6.29	6.34	6.40	6.45	6.50	6.54	6.59	6.63	6.67	6.71	6.74	6.78	6.81	6.84
28	6.26	6.31	6.37	6.42	6.47	6.51	6.55	6.59	6.63	6.67	6.71	6.74	6.77	6.81
29	6.23	6.28	6.34	6.39	6.44	6.48	6.52	6.56	6.60	6.64	6.67	6.71	6.74	6.77
30	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41	6.45	6.49	6.53	6.57	6.61	6.64	6.68	6.71	6.74
31	6.18	6.23	6.29	6.33	6.38	6.43	6.47	6.51	6.54	6.58	6.62	6.65	6.68	6.71
32	6.16	6.21	6.26	6.31	6.36	6.40	6.44	6.48	6.52	6.56	6.59	6.62	6.65	6.68
33	6.13	6.19	6.24	6.29	6.33	6.38	6.42	6.46	6.50	6.53	6.56	6.60	6.63	6.66
34	6.11	6.17	6.22	6.27	6.31	6.36	6.40	6.44	6.47	6.51	6.54	6.57	6.61	6.64
35	6.10	6.15	6.20	6.25	6.29	6.34	6.38	6.41	6.45	6.49	6.52	6.55	6.58	6.61
36	6.08	6.13	6.18	6.23	6.27	6.32	6.36	6.39	6.43	6.47	6.50	6.53	6.56	6.59
37	6.06	6.11	6.16	6.21	6.26	6.30	6.34	6.38	6.41	6.45	6.48	6.51	6.54	6.57
38	6.05	6.10	6.15	6.20	6.24	6.28	6.32	6.36	6.39	6.43	6.46	6.49	6.52	6.55
39	6.03	6.08	6.13	6.18	6.22	6.26	6.30	6.34	6.38	6.41	6.45	6.48	6.51	6.54
40	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21	6.25	6.29	6.33	6.36	6.40	6.43	6.46	6.49	6.52
41	6.00	6.06	6.10	6.15	6.19	6.24	6.27	6.31	6.35	6.38	6.41	6.44	6.47	6.50
42	5.99	6.04	6.09	6.14	6.18	6.22	6.26	6.30	6.33	6.37	6.40	6.43	6.46	6.49
43	5.98	6.03	6.08	6.12	6.17	6.21	6.25	6.28	6.32	6.35	6.38	6.42	6.44	6.47
44	5.97	6.02	6.07	6.11	6.15	6.20	6.23	6.27	6.31	6.34	6.37	6.40	6.43	6.46
45	5.96	6.01	6.06	6.10	6.14	6.18	6.22	6.26	6.29	6.33	6.36	6.39	6.42	6.45
46	5.95	6.00	6.04	6.09	6.13	6.17	6.21	6.25	6.28	6.31	6.35	6.38	6.41	6.43
47	5.94	5.99	6.03	6.08	6.12	6.16	6.20	6.24	6.27	6.30	6.33	6.36	6.39	6.42
48	5.93	5.98	6.02	6.07	6.11	6.15	6.19	6.22	6.26	6.29	6.32	6.35	6.38	6.41
49	5.92	5.97	6.01	6.06	6.10	6.14	6.18	6.21	6.25	6.28	6.31	6.34	6.37	6.40
50	5.91	5.96	6.01	6.05	6.09	6.13	6.17	6.20	6.24	6.27	6.30	6.33	6.36	6.39

ANEXO E

Valores para la distribución de Tukey

$q_{0.05}(p, f)$

	p													
f	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	6.08	8.33	9.80	10.88	11.73	12.43	13.03	13.54	13.99	14.40	14.76	15.09	15.39	15.67
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.15	10.35	10.52
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43
21	2.94	3.56	3.94	4.21	4.42	4.60	4.74	4.87	4.98	5.08	5.17	5.25	5.33	5.40
22	2.93	3.55	3.93	4.20	4.41	4.58	4.72	4.85	4.96	5.06	5.14	5.23	5.30	5.37
23	2.93	3.54	3.91	4.18	4.39	4.56	4.70	4.83	4.94	5.03	5.12	5.20	5.27	5.34
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32
25	2.91	3.52	3.89	4.15	4.36	4.53	4.67	4.79	4.90	4.99	5.08	5.16	5.23	5.30
26	2.91	3.51	3.88	4.14	4.35	4.51	4.65	4.77	4.88	4.98	5.06	5.14	5.21	5.28
27	2.90	3.51	3.87	4.13	4.33	4.50	4.64	4.76	4.86	4.96	5.04	5.12	5.19	5.26
28	2.90	3.50	3.86	4.12	4.32	4.49	4.62	4.74	4.85	4.94	5.03	5.11	5.18	5.24
29	2.89	3.49	3.85	4.11	4.31	4.47	4.61	4.73	4.84	4.93	5.01	5.09	5.16	5.23
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21
31	2.88	3.48	3.84	4.09	4.29	4.45	4.59	4.71	4.81	4.90	4.99	5.06	5.13	5.20
32	2.88	3.48	3.83	4.09	4.28	4.45	4.58	4.70	4.80	4.89	4.98	5.05	5.12	5.18
33	2.88	3.47	3.83	4.08	4.28	4.44	4.57	4.69	4.79	4.88	4.97	5.04	5.11	5.17
34	2.87	3.47	3.82	4.07	4.27	4.43	4.56	4.68	4.78	4.87	4.96	5.03	5.10	5.16
35	2.87	3.46	3.81	4.07	4.26	4.42	4.56	4.67	4.77	4.86	4.95	5.02	5.09	5.15
36	2.87	3.46	3.81	4.06	4.25	4.41	4.55	4.66	4.76	4.85	4.94	5.01	5.08	5.14
37	2.87	3.45	3.80	4.05	4.25	4.41	4.54	4.66	4.76	4.85	4.93	5.00	5.07	5.13
38	2.86	3.45	3.80	4.05	4.24	4.40	4.53	4.65	4.75	4.84	4.92	4.99	5.06	5.12
39	2.86	3.45	3.79	4.04	4.24	4.39	4.53	4.64	4.74	4.83	4.91	4.98	5.05	5.11
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11
41	2.86	3.44	3.79	4.03	4.23	4.38	4.51	4.63	4.73	4.82	4.90	4.97	5.04	5.10
42	2.85	3.44	3.78	4.03	4.22	4.38	4.51	4.62	4.72	4.81	4.89	4.96	5.03	5.09
43	2.85	3.43	3.78	4.03	4.22	4.37	4.50	4.62	4.72	4.80	4.88	4.96	5.02	5.08
44	2.85	3.43	3.78	4.02	4.21	4.37	4.50	4.61	4.71	4.80	4.88	4.95	5.02	5.08
45	2.85	3.43	3.77	4.02	4.21	4.36	4.49	4.61	4.70	4.79	4.87	4.94	5.01	5.07
46	2.85	3.42	3.77	4.01	4.20	4.36	4.49	4.60	4.70	4.79	4.87	4.94	5.00	5.06
47	2.85	3.42	3.77	4.01	4.20	4.36	4.48	4.60	4.69	4.78	4.86	4.93	5.00	5.06
48	2.84	3.42	3.76	4.01	4.20	4.35	4.48	4.59	4.69	4.78	4.86	4.93	4.99	5.05
49	2.84	3.42	3.76	4.00	4.19	4.35	4.48	4.59	4.69	4.77	4.85	4.92	4.99	5.05
50	2.84	3.42	3.76	4.00	4.19	4.34	4.47	4.58	4.68	4.77	4.85	4.92	4.98	5.04

ANEXO E

Valores para la distribución de Tukey

$q_{0.05}(p, f)$

f	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
2	15.92	16.16	16.38	16.59	16.78	16.97	17.14	17.30	17.46	17.61	17.75	17.88	18.01	18.13
3	10.69	10.84	10.98	11.11	11.24	11.36	11.47	11.58	11.68	11.78	11.87	11.96	12.05	12.13
4	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23	9.33	9.42	9.50	9.58	9.66	9.74	9.81	9.88	9.94
5	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21	8.29	8.37	8.44	8.51	8.58	8.64	8.70	8.76	8.82
6	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59	7.66	7.73	7.80	7.86	7.92	7.98	8.03	8.09	8.14
7	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17	7.24	7.30	7.36	7.42	7.48	7.53	7.58	7.63	7.68
8	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87	6.93	6.99	7.05	7.11	7.16	7.21	7.26	7.31	7.35
9	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64	6.70	6.76	6.82	6.87	6.92	6.97	7.02	7.06	7.10
10	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47	6.53	6.58	6.63	6.69	6.73	6.78	6.82	6.87	6.91
11	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33	6.38	6.44	6.49	6.54	6.58	6.63	6.67	6.71	6.75
12	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21	6.26	6.32	6.37	6.41	6.46	6.50	6.54	6.58	6.62
13	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11	6.17	6.22	6.26	6.31	6.36	6.40	6.44	6.48	6.52
14	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03	6.08	6.13	6.18	6.22	6.27	6.31	6.35	6.39	6.42
15	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96	6.01	6.06	6.10	6.15	6.19	6.23	6.27	6.31	6.34
16	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90	5.95	5.99	6.04	6.08	6.13	6.17	6.20	6.24	6.28
17	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84	5.89	5.94	5.98	6.03	6.07	6.11	6.14	6.18	6.22
18	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79	5.84	5.89	5.93	5.98	6.02	6.06	6.09	6.13	6.16
19	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75	5.80	5.85	5.89	5.93	5.97	6.01	6.05	6.08	6.11
20	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71	5.76	5.81	5.85	5.89	5.93	5.97	6.00	6.04	6.07
21	5.46	5.52	5.58	5.63	5.68	5.73	5.77	5.81	5.85	5.89	5.93	5.97	6.00	6.03
22	5.43	5.49	5.55	5.60	5.65	5.69	5.74	5.78	5.82	5.86	5.90	5.93	5.97	6.00
23	5.41	5.46	5.52	5.57	5.62	5.67	5.71	5.75	5.79	5.83	5.87	5.90	5.93	5.97
24	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59	5.64	5.68	5.72	5.76	5.80	5.84	5.87	5.91	5.94
25	5.36	5.42	5.47	5.52	5.57	5.62	5.66	5.70	5.74	5.78	5.81	5.85	5.88	5.91
26	5.34	5.40	5.45	5.50	5.55	5.59	5.64	5.68	5.72	5.75	5.79	5.82	5.85	5.89
27	5.32	5.38	5.43	5.48	5.53	5.57	5.61	5.66	5.69	5.73	5.77	5.80	5.83	5.86
28	5.30	5.36	5.41	5.46	5.51	5.55	5.60	5.64	5.67	5.71	5.75	5.78	5.81	5.84
29	5.29	5.34	5.40	5.44	5.49	5.54	5.58	5.62	5.66	5.69	5.73	5.76	5.79	5.82
30	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47	5.52	5.56	5.60	5.64	5.67	5.71	5.74	5.77	5.80
31	5.26	5.31	5.36	5.41	5.46	5.50	5.54	5.58	5.62	5.66	5.69	5.72	5.76	5.79
32	5.24	5.30	5.35	5.40	5.45	5.49	5.53	5.57	5.61	5.64	5.68	5.71	5.74	5.77
33	5.23	5.29	5.34	5.39	5.43	5.48	5.52	5.56	5.59	5.63	5.66	5.69	5.73	5.76
34	5.22	5.27	5.33	5.37	5.42	5.46	5.50	5.54	5.58	5.61	5.65	5.68	5.71	5.74
35	5.21	5.26	5.31	5.36	5.41	5.45	5.49	5.53	5.57	5.60	5.64	5.67	5.70	5.73
36	5.20	5.25	5.30	5.35	5.40	5.44	5.48	5.52	5.55	5.59	5.62	5.66	5.69	5.72
37	5.19	5.24	5.29	5.34	5.39	5.43	5.47	5.51	5.54	5.58	5.61	5.64	5.67	5.70
38	5.18	5.23	5.28	5.33	5.38	5.42	5.46	5.50	5.53	5.57	5.60	5.63	5.66	5.69
39	5.17	5.22	5.27	5.32	5.37	5.41	5.45	5.49	5.52	5.56	5.59	5.62	5.65	5.68
40	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36	5.40	5.44	5.48	5.51	5.55	5.58	5.61	5.64	5.67
41	5.15	5.21	5.26	5.30	5.35	5.39	5.43	5.47	5.50	5.54	5.57	5.60	5.63	5.66
42	5.15	5.20	5.25	5.30	5.34	5.38	5.42	5.46	5.50	5.53	5.56	5.59	5.62	5.65
43	5.14	5.19	5.24	5.29	5.33	5.37	5.41	5.45	5.49	5.52	5.55	5.58	5.61	5.64
44	5.13	5.19	5.24	5.28	5.33	5.37	5.41	5.44	5.48	5.51	5.55	5.58	5.61	5.64
45	5.13	5.18	5.23	5.28	5.32	5.36	5.40	5.44	5.47	5.51	5.54	5.57	5.60	5.63
46	5.12	5.17	5.22	5.27	5.31	5.35	5.39	5.43	5.46	5.50	5.53	5.56	5.59	5.62
47	5.11	5.17	5.22	5.26	5.31	5.35	5.39	5.42	5.46	5.49	5.52	5.55	5.58	5.61
48	5.11	5.16	5.21	5.26	5.30	5.34	5.38	5.42	5.45	5.48	5.52	5.55	5.58	5.61
49	5.10	5.16	5.20	5.25	5.29	5.33	5.37	5.41	5.44	5.48	5.51	5.54	5.57	5.60
50	5.10	5.15	5.20	5.24	5.29	5.33	5.37	5.40	5.44	5.47	5.50	5.53	5.56	5.59

ANEXO F

TABLA PARA PRUEBAS DE RANGOS MÚLTIPLES DE DUNCAN ($\alpha = 0.05$)

Valores críticos q′ (p, df, α)

df p->	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969
2	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085
3	4.501	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516
4	3.926	4.013	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033
5	3.635	3.749	3.796	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814
6	3.460	3.586	3.649	3.680	3.694	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697
7	3.344	3.477	3.548	3.588	3.611	3.622	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625
8	3.261	3.398	3.475	3.521	3.549	3.566	3.575	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579
9	3.199	3.339	3.420	3.470	3.502	3.523	3.536	3.544	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547
10	3.151	3.293	3.376	3.430	3.465	3.489	3.505	3.516	3.522	3.525	3.525	3.525	3.525	3.525	3.525	3.525
11	3.113	3.256	3.341	3.397	3.435	3.462	3.480	3.493	3.501	3.506	3.509	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510
12	3.081	3.225	3.312	3.370	3.410	3.439	3.459	3.474	3.484	3.491	3.495	3.498	3.498	3.498	3.498	3.498
13	3.055	3.200	3.288	3.348	3.389	3.419	3.441	3.458	3.470	3.478	3.484	3.488	3.490	3.490	3.490	3.490
14	3.033	3.178	3.268	3.328	3.371	3.403	3.426	3.444	3.457	3.467	3.474	3.479	3.482	3.484	3.484	3.484
15	3.014	3.160	3.250	3.312	3.356	3.389	3.413	3.432	3.446	3.457	3.465	3.471	3.476	3.478	3.480	3.480
16	2.998	3.144	3.235	3.297	3.343	3.376	3.402	3.422	3.437	3.449	3.458	3.465	3.470	3.473	3.476	3.477
17	2.984	3.130	3.222	3.285	3.331	3.365	3.392	3.412	3.429	3.441	3.451	3.459	3.465	3.469	3.472	3.474
18	2.971	3.117	3.210	3.274	3.320	3.356	3.383	3.404	3.421	3.435	3.445	3.454	3.460	3.465	3.469	3.472
19	2.960	3.106	3.199	3.264	3.311	3.347	3.375	3.397	3.415	3.429	3.440	3.449	3.456	3.462	3.466	3.469
20	2.950	3.097	3.190	3.255	3.303	3.339	3.368	3.390	3.409	3.423	3.435	3.445	3.452	3.459	3.463	3.467
df p->	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
21	2.941	3.088	3.181	3.247	3.295	3.332	3.361	3.385	3.403	3.418	3.431	3.441	3.449	3.456	3.461	3.465
22	2.933	3.080	3.173	3.239	3.288	3.326	3.355	3.379	3.398	3.414	3.427	3.437	3.446	3.453	3.459	3.464
23	2.926	3.072	3.166	3.233	3.282	3.320	3.350	3.374	3.394	3.410	3.423	3.434	3.443	3.451	3.457	3.462
24	2.919	3.066	3.160	3.226	3.276	3.315	3.345	3.370	3.390	3.406	3.420	3.431	3.441	3.449	3.455	3.461
25	2.913	3.059	3.154	3.221	3.271	3.310	3.341	3.366	3.386	3.403	3.417	3.429	3.439	3.447	3.454	3.459
26	2.907	3.054	3.149	3.216	3.266	3.305	3.336	3.362	3.382	3.400	3.414	3.426	3.436	3.445	3.452	3.458
27	2.902	3.049	3.144	3.211	3.262	3.301	3.332	3.358	3.379	3.397	3.412	3.424	3.434	3.443	3.451	3.457
28	2.897	3.044	3.139	3.206	3.257	3.297	3.329	3.355	3.376	3.394	3.409	3.422	3.433	3.442	3.450	3.456
29	2.892	3.039	3.135	3.202	3.253	3.293	3.326	3.352	3.373	3.392	3.407	3.420	3.431	3.440	3.448	3.455
30	2.888	3.035	3.131	3.199	3.250	3.290	3.322	3.349	3.371	3.389	3.405	3.418	3.429	3.439	3.447	3.454
31	2.884	3.031	3.127	3.195	3.246	3.287	3.319	3.346	3.368	3.387	3.403	3.416	3.428	3.438	3.446	3.454
32	2.881	3.028	3.123	3.192	3.243	3.284	3.317	3.344	3.366	3.385	3.401	3.415	3.426	3.436	3.445	3.453
33	2.877	3.024	3.120	3.188	3.240	3.281	3.314	3.341	3.364	3.383	3.399	3.413	3.425	3.435	3.444	3.452
34	2.874	3.021	3.117	3.185	3.238	3.279	3.312	3.339	3.362	3.381	3.398	3.412	3.424	3.434	3.443	3.451
35	2.871	3.018	3.114	3.183	3.235	3.276	3.309	3.337	3.360	3.379	3.396	3.410	3.423	3.433	3.443	3.451
36	2.868	3.015	3.111	3.180	3.232	3.274	3.307	3.335	3.358	3.378	3.395	3.409	3.421	3.432	3.442	3.450
37	2.865	3.013	3.109	3.178	3.230	3.272	3.305	3.333	3.356	3.376	3.393	3.408	3.420	3.431	3.441	3.449
38	2.863	3.010	3.106	3.175	3.228	3.270	3.303	3.331	3.355	3.375	3.392	3.407	3.419	3.431	3.440	3.449
39	2.861	3.008	3.104	3.173	3.226	3.268	3.301	3.330	3.353	3.373	3.391	3.406	3.418	3.430	3.440	3.448
40	2.858	3.005	3.102	3.171	3.224	3.266	3.300	3.328	3.352	3.372	3.389	3.404	3.418	3.429	3.439	3.448
48	2.843	2.991	3.087	3.157	3.211	3.253	3.288	3.318	3.342	3.363	3.382	3.398	3.412	3.424	3.435	3.445
60	2.829	2.976	3.073	3.143	3.198	3.241	3.277	3.307	3.333	3.355	3.374	3.391	3.406	3.419	3.431	3.441
80	2.814	2.961	3.059	3.130	3.185	3.229	3.266	3.297	3.323	3.346	3.366	3.384	3.400	3.414	3.427	3.438
120	2.800	2.947	3.045	3.116	3.172	3.217	3.254	3.286	3.313	3.337	3.358	3.377	3.394	3.409	3.423	3.435
240	2.786	2.933	3.031	3.103	3.159	3.205	3.243	3.276	3.304	3.329	3.350	3.370	3.388	3.404	3.418	3.432
Inf	2.772	2.918	3.017	3.089	3.146	3.193	3.232	3.265	3.294	3.320	3.343	3.363	3.382	3.399	3.414	3.428

ANEXO F

TABLA PARA PRUEBAS DE RANGOS MÚLTIPLES DE DUNCAN ($\alpha = 0.01$)

Valores críticos q′ (p, df, α)

Df p→	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024
2	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036
3	8.260	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321
4	6.511	6.677	6.740	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755
5	5.702	5.893	5.989	6.040	6.065	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074
6	5.243	5.439	5.549	5.614	5.655	5.680	5.694	5.701	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703
7	4.949	5.145	5.260	5.333	5.383	5.416	5.439	5.454	5.464	5.470	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472
8	4.745	4.939	5.056	5.134	5.189	5.227	5.256	5.276	5.291	5.302	5.309	5.313	5.316	5.317	5.317	5.317
9	4.596	4.787	4.906	4.986	5.043	5.086	5.117	5.142	5.160	5.174	5.185	5.193	5.199	5.202	5.205	5.206
10	4.482	4.671	4.789	4.871	4.931	4.975	5.010	5.036	5.058	5.074	5.087	5.098	5.106	5.112	5.117	5.120
11	4.392	4.579	4.697	4.780	4.841	4.887	4.923	4.952	4.975	4.994	5.009	5.021	5.031	5.039	5.045	5.050
12	4.320	4.504	4.622	4.705	4.767	4.815	4.852	4.882	4.907	4.927	4.944	4.957	4.969	4.978	4.986	4.993
13	4.260	4.442	4.560	4.643	4.706	4.754	4.793	4.824	4.850	4.871	4.889	4.904	4.917	4.927	4.936	4.944
14	4.210	4.391	4.508	4.591	4.654	4.703	4.743	4.775	4.802	4.824	4.843	4.859	4.872	4.884	4.894	4.902
15	4.167	4.346	4.463	4.547	4.610	4.660	4.700	4.733	4.760	4.783	4.803	4.820	4.834	4.846	4.857	4.866
16	4.131	4.308	4.425	4.508	4.572	4.622	4.662	4.696	4.724	4.748	4.768	4.785	4.800	4.813	4.825	4.835
17	4.099	4.275	4.391	4.474	4.538	4.589	4.630	4.664	4.692	4.717	4.737	4.755	4.771	4.785	4.797	4.807
18	4.071	4.246	4.361	4.445	4.509	4.559	4.601	4.635	4.664	4.689	4.710	4.729	4.745	4.759	4.771	4.782
19	4.046	4.220	4.335	4.418	4.483	4.533	4.575	4.610	4.639	4.664	4.686	4.705	4.722	4.736	4.749	4.760
20	4.024	4.197	4.312	4.395	4.459	4.510	4.552	4.587	4.617	4.642	4.664	4.684	4.701	4.716	4.729	4.741
Df p→	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
21	4.004	4.177	4.291	4.374	4.438	4.489	4.531	4.567	4.597	4.622	4.645	4.664	4.682	4.697	4.711	4.723
22	3.986	4.158	4.272	4.355	4.419	4.470	4.513	4.548	4.578	4.604	4.627	4.647	4.664	4.680	4.694	4.706
23	3.970	4.141	4.254	4.337	4.402	4.453	4.496	4.531	4.562	4.588	4.611	4.631	4.649	4.665	4.679	4.692
24	3.955	4.126	4.239	4.322	4.386	4.437	4.480	4.516	4.546	4.573	4.596	4.616	4.634	4.651	4.665	4.678
25	3.942	4.112	4.224	4.307	4.371	4.423	4.466	4.502	4.532	4.559	4.582	4.603	4.621	4.638	4.652	4.665
26	3.930	4.099	4.211	4.294	4.358	4.410	4.452	4.489	4.520	4.546	4.570	4.591	4.609	4.626	4.640	4.654
27	3.918	4.087	4.199	4.282	4.346	4.397	4.440	4.477	4.508	4.535	4.558	4.579	4.598	4.615	4.630	4.643
28	3.908	4.076	4.188	4.270	4.334	4.386	4.429	4.465	4.497	4.524	4.548	4.569	4.587	4.604	4.619	4.633
29	3.898	4.065	4.177	4.260	4.324	4.376	4.419	4.455	4.486	4.514	4.538	4.559	4.578	4.595	4.610	4.624
30	3.889	4.056	4.168	4.250	4.314	4.366	4.409	4.445	4.477	4.504	4.528	4.550	4.569	4.586	4.601	4.615
31	3.881	4.047	4.159	4.241	4.305	4.357	4.400	4.436	4.468	4.495	4.519	4.541	4.560	4.577	4.593	4.607
32	3.873	4.039	4.150	4.232	4.296	4.348	4.391	4.428	4.459	4.487	4.511	4.533	4.552	4.570	4.585	4.600
33	3.865	4.031	4.142	4.224	4.288	4.340	4.383	4.420	4.452	4.479	4.504	4.525	4.545	4.562	4.578	4.592
34	3.859	4.024	4.135	4.217	4.281	4.333	4.376	4.413	4.444	4.472	4.496	4.518	4.538	4.555	4.571	4.586
35	3.852	4.017	4.128	4.210	4.273	4.325	4.369	4.406	4.437	4.465	4.490	4.511	4.531	4.549	4.565	4.579
36	3.846	4.011	4.121	4.203	4.267	4.319	4.362	4.399	4.431	4.459	4.483	4.505	4.525	4.543	4.559	4.573
37	3.840	4.005	4.115	4.197	4.260	4.312	4.356	4.393	4.425	4.452	4.477	4.499	4.519	4.537	4.553	4.568
38	3.835	3.999	4.109	4.191	4.254	4.306	4.350	4.387	4.419	4.447	4.471	4.493	4.513	4.531	4.548	4.562
39	3.830	3.993	4.103	4.185	4.249	4.301	4.344	4.381	4.413	4.441	4.466	4.488	4.508	4.526	4.542	4.557
40	3.825	3.988	4.098	4.180	4.243	4.295	4.339	4.376	4.408	4.436	4.461	4.483	4.503	4.521	4.537	4.552
48	3.793	3.955	4.064	4.145	4.209	4.261	4.304	4.341	4.374	4.402	4.427	4.450	4.470	4.489	4.506	4.521
60	3.762	3.922	4.030	4.111	4.174	4.226	4.270	4.307	4.340	4.368	4.394	4.417	4.437	4.456	4.474	4.489
80	3.732	3.890	3.997	4.077	4.140	4.192	4.236	4.273	4.306	4.335	4.360	4.384	4.405	4.424	4.442	4.458
120	3.702	3.858	3.964	4.044	4.107	4.158	4.202	4.239	4.272	4.301	4.327	4.351	4.372	4.392	4.410	4.426
240	3.672	3.827	3.932	4.011	4.073	4.125	4.168	4.206	4.239	4.268	4.294	4.318	4.339	4.359	4.378	4.394
Inf	3.643	3.796	3.900	3.978	4.040	4.091	4.135	4.172	4.205	4.235	4.261	4.285	4.307	4.327	4.345	4.363

ANEXO G

Valores críticos inferior y superior de la prueba de rangos de Wilcoxon

	un extremo: $\alpha = 0.05$ dos extremos: $\alpha = 0.10$		$\alpha = 0.025$ $\alpha = 0.05$		$\alpha = 0.01$ $\alpha = 0.02$		$\alpha = 0.005$ $\alpha = 0.01$	
n	*(Inferior*	*Superior)*	*(inferio r*	*Superior)*	*(inferio r*	*Superior)*	*(inferio r*	*Superior)*
5	0	15	-	-	-	-	-	-
6	2	19	0	21	-	-	-	-
7	3	25	2	26	0	28	-	-
8	5	31	3	33	1	35	0	36
9	8	37	5	40	3	42	1	44
10	10	45	8	47	5	50	3	52
11	13	53	10	56	7	59	5	61
12	17	61	13	65	10	68	7	71
13	21	70	17	74	12	79	10	81
14	25	80	21	84	16	89	13	92
15	30	90	25	995	19	101	16	104
16	35	101	29	107	23	113	19	117
17	41	112	34	119	27	126	23	130
18	47	124	40	131	32	139	27	144
19	53	137	46	144	37	153	32	158
20	60	150	52	158	43	167	37	173

ANEXO H

RESPUESTA A ALGUNOS EJERCICIOS PROPUESTOS SELECCIONADOS DE LOS CAPITULOS

CAPITULO II: EL MÉTODO CIENTÍFICO

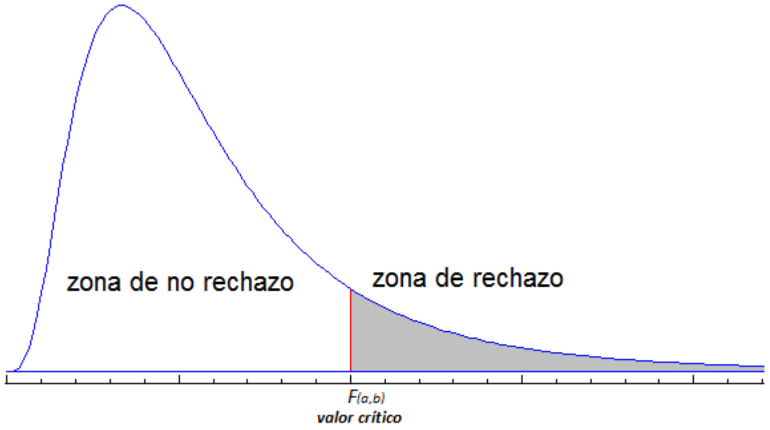
1. Los errores de tipo I y tipo II

Error de tipo I: se define al riesgo que asume un investigador cuando rechaza una hipótesis nula cuando existen evidencias de que es verdadera.

Error de tipo II: Viene a ser el riesgo que asume el investigador cuando acepta una hipótesis nula que tenga evidencias de que es falsa.

3. *Región de rechazo*, es la zona en la cual se encuentran los valores suficientemente grandes y que resultan mayores al valor crítico.

Región de no rechazo, es la zona en la cual se ubican los valores menores al valor crítico por lo que permiten en circunstancias particulares no rechazar una hipótesis nula.



5. Verdadero

7. a) Se rechaza la hipótesis nula si el valor muestral es mayor que el valor crítico ($T_c > t_\alpha$)

b) Se rechaza la hipótesis nula si el valor muestral es mayor o menor que el valor crítico ($T_c > t_\alpha$ o $T_c < -t_\alpha$)

c) Se rechaza la hipótesis nula si el valor muestral es menor que el valor crítico

$(T_c < -t_\alpha)$

9. a) No está en lo correcto debido a que se rechaza la hipótesis $\mu = 1000$ a favor de $\mu < 1000$
b) No está en lo correcto, debido a que se rechaza la hipótesis nula $\mu = 1000$, con una confianza del 95%.
c) Con una confianza del 99% el gerente no está en lo cierto debido a que la hipótesis nula $\mu = 1000$, se rechaza.

11. No puede sancionarse al ingeniero, debido a que la hipótesis nula $\mu = 96\ horas$, es rechazado a favor de la hipótesis alternativa $\mu > 96$, ya que el promedio de las muestras es de 110 horas.

13. Para resolver la pregunta empleamos la distribución t por que la muestra es menos de 30
a) intervalo con 90% de confianza: [47.805 , 49.995]

b) Intervalo con 95% de confianza: [47.5791 , 50.2209]

c) Intervalo con 99% de confianza: [47.11 , 50.69]

15. El intervalo de confianza del 98% es: [-510.804,-489.196]

17. Intervalo aproximado con una confianza del 95.0% para p:

[0.258248 , 0.414498]

19. Intervalo aproximado de confianza del 95.0% para p: [0.372139 , 0.428352]

CAPÍTULO III. COMPARACIÓN DE MEDIAS DE DOS TRATAMIENTOS

1. Prueba t para comparación de medias
Hipótesis nula: $\mu_A = \mu_B$
Hipótesis Alt.: $\mu_A \neq \mu_B$
Suponiendo varianzas iguales: $t = 2.31282$ valor-P = 0.0240113
Se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0.05.

3.- Prueba para varianzas idénticas

Hipótesis nula: $\mu_A = \mu_B$
Hipótesis alt: $\mu_A \neq \mu_B$
Suponiendo varianzas iguales: $T = 3.333$ es mayor que $t_{(0.05,43)} = 1.684$

Se rechaza la hipótesis nula con $alfa = 0.05$
De acuerdo al resultado, la citada municipalidad tendrá evidencias suficientes respecto a la contaminación que producen los autos, siendo esta Diferencia significativa mayor en el auto A que en el B.

5.- a) Prueba t para comparar medias

Hipótesis nula: $\mu_1 = \mu_2$ media1 = media2

Hipótesis Alt.: media1 <> media2

suponiendo varianzas iguales: t = -0.235798 valor-P = 0.815771

No se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0.05.
El promedio de las dos aulas de niños y niñas aparentemente no presentan diferencias estadísticas significativas

b) El Intervalo de confianza del 98.0% para la diferencia de medias suponiendo varianzas iguales:

- 0.175 +/- 1.86158 [-2.03658 ; 1.68658]

7. Hipótesis Nula: media = 0.0

Alternativa: mayor que

Estadístico t calculado = 24.0

Valor-P = 0.0
Rechazar la hipótesis nula para alfa = 0.05.

De acuerdo a la decisión que se arribó se puede concluir que el programa de entrenamiento ha contribuido en el aumento de la productividad en los trabajadores.

9. Hipótesis nula: $\mu_F = \mu_I$

Hipótesis Alt.: $\mu_F \neq \mu_I$

Suponiendo varianzas iguales: t = 14.2242 valor-P = 0.0

Se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0.05.

Se concluye que el promedio de peso final e inicial es significativamente diferente.

11.a) Hipótesis nula: $\mu_E = \mu_P$

Hipótesis Alt.: $\mu_E \neq \mu_P$

Suponiendo varianzas iguales: t = -0.873434 valor-P = 0.389364

No se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0.05.

No se observan diferencias significativas en el coeficiente intelectual de los niños de colegios estatales y privados.

b) Hipótesis nula: $\mu_E = \mu_P$

Hipótesis Alt.: $\mu_F \neq \mu_I$

Sin suponer varianzas iguales: t = -0.873434 valor-P = 0.389421

No se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0.05.

De acuerdo al resultado, en esta suposición se concluye que no existen diferencias significativas en el Coeficiente intelectual en niños de colegios estatales y privados.

CAPÍTULO IV DISEÑO DE EXPERIMENTOS

1. Ciertamente en la técnica del ANVA, el test que se emplea es la F, es la razón por la que la prueba es de un solo extremo, puesto que el gráfico de la prueba es asimétrica positiva.

3.- Hipótesis nula: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_t$

Hipótesis alternativa: $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \cdots \mu_t$

5.- a) para el 1% $F_c = 15.16 > F_{(4,20)(1\%)} = 4.431$ significativo

Para 5% $F_c = 15.16 > F_{(4,20)(5\%)} = 2.866$ significativo

Para 10% $F_c = 15.16 > F_{(4,20)(10\%)} = 2.249$ significativo

b) Tabla de Medias para Rendimiento por Razas con intervalos de confianza del 90.0%

Razas	*Casos*	*Media*	*Error Est.* (*s agrupada*)	*Límite Inferior*	*Límite Superior*
1	5	**27.0**	2.2891	**24.2083**	**29.7917**
2	5	**18.2**	2.2891	**15.4083**	**20.9917**
3	5	**24.6**	2.2891	**21.8083**	**27.3917**
4	5	**32.0**	2.2891	**29.2083**	**34.7917**
5	5	**42.0**	2.2891	**39.2083**	**44.7917**
Total	25	**28.76**			

7. a) Existen diferencias significativas entre los aumentos de peso de las razas de cuyes empleados en el experimento puesto que el valor de F_c= 17.20 es mayor que $F_{(3,16)(1\%)}$= 5.417

b) El aumento de peso promedio de toda la muestra es 155.95 gramos.

c) Tabla de Medias para Pesos por Razas de cuyes con intervalos de confianza del 85.0%

tipos	*Casos*	*Media*	*Error Est.* (*s agrupada*)	*Límite Inferior*	*Límite Superior*
1	5	200.0	10.0165	**189.29**	**210.71**
2	5	103.0	10.0165	**92.29**	**113.71**
3	5	174.4	10.0165	**163.69**	**185.11**
4	5	146.4	10.0165	**135.69**	**157.11**
Total	20	155.95			

9. a) No existe significación estadística tanto para el 1% y 5%

b) El recuento promedio general del número de manzanas malogradas en todo el experimento fue de, 10.75 manzanas.

11. Se rechaza la hipótesis nula, dado que el valor de $F_c = 16.29$ es mayor que $F_{(3,20)(5\%)} = 3.098$.

CAPITULO V DISEÑO DE BLOQUES COMPLETOS AL AZAR

1.- El diseño de bloques presenta tres fuentes de variabilidad: Entre tratamientos, Entre bloques y Dentro de tratamientos: mientras que el diseño completamente al azar solamente dos: Entre tratamientos y Dentro de tratamientos.

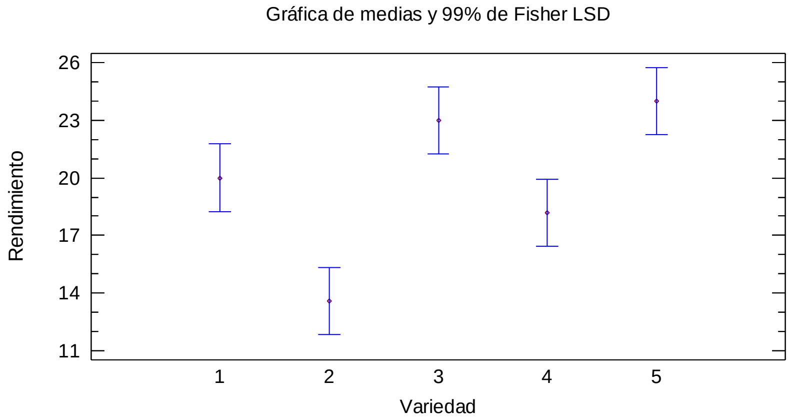
3.- a) Se elabora el ANVA, de donde se concluye que existen diferencias altamente significativas entre el rendimiento de las variedades de cebolla con un nivel de confianza del 99%. Dado que el valor de $F_c = 12.73$ es mayor que $F_{(4,16)(0.01)} = 4.893$

Análisis de Varianza para Rendimiento - Suma de Cuadrados Tipo III

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Variedad	344.56	4	86.14	12.73	0.0001
B:Bloques	17.76	4	4.44	0.66	0.6310
RESIDUOS	108.24	16	6.765		
TOTAL (CORREGIDO)	470.56	24			

Todas las razones-F se basan en el cuadrado medio del error residual

b) Empleando el paquete statgraphics Centurion *XV* se presenta la gráfica correspondiente



9.-

a) El análisis estadístico se presenta en la tabla

Análisis de Varianza para Puntaje

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Métodos	49.76	4	12.44	3.18	0.0423
B:Bloques	2084.56	4	521.14	133.11	0.0000
RESIDUOS	62.64	16	3.915		
TOTAL (CORREGIDO)	2196.96	24			

Todas las razones-F se basan en el cuadrado medio del error residual

b. A la luz de los resultados los métodos no tienen efectos similares en los estudiantes, dado que se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significación de 0.05 y una confianza del 95%

c. Se deja al alumno intentar el cálculo.

11. a) Análisis estadístico
Se elabora el análisis de varianza para probar los niveles de fertilización

Análisis de Varianza para Rendimiento - Suma de Cuadrados Tipo III

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Fertilizante	1.3525E7	4	3.38125E6	3.42	0.0438
B:Bloque	1.8775E6	3	625833.	0.63	0.6081
RESIDUOS	1.1875E7	12	989583.		
TOTAL (CORREGIDO)	2.72775E7	19			

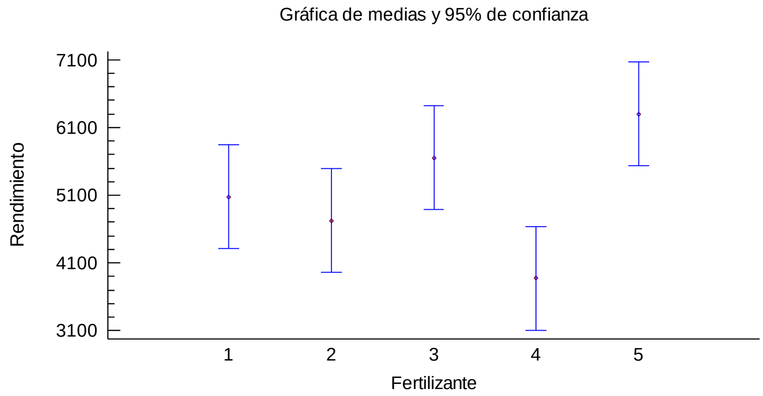
Todas las razones-F se basan en el cuadrado medio del error residual

b) Para un nivel de significación del 0.05, las medias de rendimiento para distintos niveles de fertilización muestran diferencias estadísticas significativas, puesto que el valor de p es inferior al 0.05.

c) Intervalos de confianza para la media de tratamiento

			Error	*Límite*	*Límite*
Nivel	*Casos*	*Media*	*Est.*	*Inferior*	*Superior*
MEDIA GLOBAL	20	5125.0			
Fertilizante					
1	4	5075.0	497.389	**3991.28**	**6158.72**
2	4	4725.0	497.389	**3641.28**	**5808.72**
3	4	5650.0	497.389	**4566.28**	**6733.72**
4	4	3875.0	497.389	**2791.28**	**4958.72**
5	4	6300.0	497.389	**5216.28**	**7383.72**

d)



CAPITULO VI PRUEBAS DE SIGNIFICACION ESTADÍSTICA

1.- a) Comparaciones testigo Vs variedades

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*	*+/- Límites*
1 - 2	*	6.0	1.89982
1 - 3	*	-2.86	1.89982
1 - 4	*	4.26	1.89982
1 - 5	*	7.66	1.89982

b)- Prueba de Tukey

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*	*+/- Límites*
1 - 2	*	6.0	2.74677
1 - 3	*	-2.86	2.74677
1 - 4	*	4.26	2.74677
1 - 5	*	7.66	2.74677
2 - 3	*	-8.86	2.74677

2 - 4		-1.74	2.74677
2 - 5		1.66	2.74677
3 - 4	*	7.12	2.74677
3 - 5	*	10.52	2.74677
4 - 5	*	3.4	2.74677

* indica una diferencia significativa.

c)- Prueba de Duncan

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*
1 - 2	*	6.0
1 - 3	*	-2.86
1 - 4	*	4.26
1 - 5	*	7.66
2 - 3	*	-8.86
2 - 4		-1.74
2 - 5		1.66
3 - 4	*	7.12
3 - 5	*	10.52
4 - 5	*	3.4

* indica una diferencia significativa.

Esta tabla aplica un procedimiento de comparación múltiple para determinar cuáles medias son significativamente diferentes de otras. El asterisco que se encuentra al lado de los 8 pares indica que estos pares muestran diferencias estadísticas significativas con un nivel del 95.0% de confianza. El método empleado en este caso para discriminar entre las medias es el procedimiento de comparación múltiple de Duncan. Con este método hay un riesgo del 5.0% al decir que uno o más pares son significativamente diferentes, cuando la diferencia real es igual a 0.

3.- a) Análisis de Varianza para Puntaje

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Tipo	857.4	3	285.8	34.59	0.0000
B:Bloque	25.5	9	2.83333	0.34	0.9519
RESIDUOS	223.1	27	8.26296		
TOTAL (CORREGIDO)	1106.0	39			

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de Puntaje en contribuciones debido a varios factores. Los valores-P prueban la significancia estadística de cada uno de los factores. Puesto que un valor-P es menor que 0.05, este factor tiene un efecto estadísticamente significativo sobre Puntaje con un 95.0% de nivel de confianza.

b) Prueba de DMS

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*	*+/- Límites*
1 - 2		-2.1	2.6377
1 - 3	*	-5.7	2.6377
1 - 4	*	7.0	2.6377
2 - 3	*	-3.6	2.6377
2 - 4	*	9.1	2.6377
3 - 4	*	12.7	2.6377

* indica una diferencia significativa.

c) Prueba de Tuckey

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*	*+/- Límites*
1 - 2		-2.1	3.51869
1 - 3	*	-5.7	3.51869
1 - 4	*	7.0	3.51869
2 - 3	*	-3.6	3.51869
2 - 4	*	9.1	3.51869
3 - 4	*	12.7	3.51869

* indica una diferencia significativa.

Esta tabla aplica un procedimiento de comparación múltiple para determinar cuáles medias son significativamente diferentes de otras. La mitad inferior de la salida muestra las diferencias estimadas entre cada par de medias. El asterisco que se encuentra al lado de los 5 pares indica que estos pares muestran diferencias estadísticas significativas con un nivel del 95.0% de confianza. El método empleado actualmente para discriminar entre las medias es el procedimiento de diferencia honestamente significativa (HSD) de Tukey. Con este método hay un riesgo del 5.0% al decir que uno o más pares son significativamente diferentes, cuando la diferencia real es igual a 0.

d) Prueba de Rangos múltiples de Duncan

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*
1 - 2		-2.1
1 - 3	*	-5.7
1 - 4	*	7.0
2 - 3	*	-3.6
2 - 4	*	9.1
3 - 4	*	12.7

* indica una diferencia significativa.

La tabla de salida muestra las diferencias estimadas entre cada par de medias. El asterisco que se encuentra al lado de los 5 pares indica que estos pares muestran diferencias estadísticas significativas con un nivel del 95.0% de confianza. El método empleado para discriminar entre las medias es el procedimiento de comparación múltiple de Duncan. Con este método hay un riesgo del 5.0% al decir que uno o más pares son significativamente diferentes, cuando la diferencia real es igual a 0.

7.- a) Análisis de varianza

Tabla ANOVA para rendimiento por tratamiento

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
Entre grupos	154.73	2	77.3652	36.68	0.0000
Intra grupos	46.404	22	2.10927		
Total (Corr.)	201.134	24			

La razón-F, que en este caso es igual a 36.6786, es el cociente entre el estimado entre-grupos y el estimado dentro-de-grupos. Puesto que el valor-P de la prueba-F es menor que 0.05, existe una diferencia estadísticamente significativa entre la medias de rendimiento de las variedades de espárrago, con un nivel del 95.0% de confianza. Para determinar cuáles medias son significativamente diferentes de otras, realizamos Pruebas de Rangos Múltiples de Duncan

b). Prueba de Duncan

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*
1 - 2	*	4.01
1 - 3	*	5.685
2 - 3		1.675

* indica una diferencia significativa.

c) Prueba de Tukey

Método: 99.0 porcentaje Tukey HSD

tratamiento	*Casos*	*Media*	*Grupos Homogéneos*
3	8	6.725	X
2	7	8.4	X
1	10	12.41	X

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*	*+/- Límites*

1 - 2	*	4.01	2.31768
1 - 3	*	5.685	2.23085
2 - 3		1.675	2.43405

* indica una diferencia significativa.

9.

a) Análisis de varianza

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
A:variedades	2.99026E7	4	7.47565E6	4.41	0.0136
B:Bloq	3.88739E6	4	971847.	0.57	0.6861
RESIDUOS	2.71358E7	16	1.69599E6		
TOTAL (CORREGIDO)	6.09258E7	24			

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de Kilogramo en contribuciones debidas a varios factores. La contribución de cada factor se mide eliminando los efectos de los demás factores. Los valores-P prueban la significancia estadística de cada uno de los factores. Puesto que un valor-P es menor que 0.05, este factor tiene un efecto estadísticamente significativo sobre Kilogramo con un 99.0% de nivel de confianza.

b) Prueba de Tukey

Método: 95.0 porcentaje Tukey HSD

variedades	*Casos*	*Media LS*	*Sigma LS*	*Grupos Homogéneos*
1	5	10260.0	582.407	X
5	5	10488.6	582.407	X
4	5	11380.0	582.407	XX
3	5	11657.8	582.407	XX
2	5	13346.0	582.407	X

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*	*+/- Límites*
1 - 2	*	-3086.0	2524.46
1 - 3		-1397.8	2524.46
1 - 4		-1120.0	2524.46

1 - 5		-228.6	2524.46
2 - 3		1688.2	2524.46
2 - 4		1966.0	2524.46
2 - 5	*	2857.4	2524.46
3 - 4		277.8	2524.46
3 - 5		1169.2	2524.46
4 - 5		891.4	2524.46

* indica una diferencia significativa.

Esta tabla aplica un procedimiento de comparación múltiple para determinar cuáles medias son significativamente diferentes de otras. El asterisco que se encuentra al lado de los 2 pares indica que estos pares muestran diferencias estadísticamente significativas con un nivel del 95.0% de confianza. El método empleado actualmente para discriminar entre las medias es el procedimiento de diferencia honestamente significativa (HSD) de Tukey. Con este método hay un riesgo del 5.0% al decir que uno o más pares son significativamente diferentes, cuando la diferencia real es igual a 0.

c) Prueba de Rangos Múltiples de Duncan

Método: 95.0 porcentaje Duncan

variedades	*Casos*	*Media LS*	*Sigma LS*	*Grupos Homogéneos*
1	5	10260.0	582.407	X
5	5	10488.6	582.407	X
4	5	11380.0	582.407	X
3	5	11657.8	582.407	XX
2	5	13346.0	582.407	X

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*
1 - 2	*	-3086.0
1 - 3		-1397.8
1 - 4		-1120.0

1 - 5		-228.6
2 - 3		1688.2
2 - 4	*	1966.0
2 - 5	*	2857.4
3 - 4		277.8
3 - 5		1169.2
4 - 5		891.4

* indica una diferencia significativa.

Esta tabla aplica un procedimiento de comparación múltiple para determinar cuáles medias son significativamente diferentes de otras. El asterisco que se encuentra al lado de los 3 pares indica que estos pares muestran diferencias estadísticamente significativas con un nivel del 95.0% de confianza. El método empleado actualmente para discriminar entre las medias es el procedimiento de comparación múltiple de Duncan. Con este método hay un riesgo del 5.0% al decir que uno o más pares son significativamente diferentes, cuando la diferencia real es igual a 0.

CAPITULO VII: DISEÑO EN CUADRADO LATINO

Hipótesis:

$$H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu_E$$
$$H_1: \mu_A \neq \mu_B \neq \mu_C \neq \mu_D \neq \mu_E$$

Análisis de Varianza para RENDIMIENTO/parcela

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Columnas	17.36	4	4.34	0.93	0.4795
B:Filas	10.56	4	2.64	0.56	0.6929
C:Tratamiento	1678.96	4	419.74	89.82	0.0000
RESIDUOS	56.08	12	4.67333		
TOTAL (CORREGIDO)	1762.96	24			

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de RENDIMIENTO en contribuciones debidas a varios factores (columnas, filas, tratamientos, residuos. Los valores-P prueban la significancia estadística de cada uno de los factores. Puesto que un valor-P correspondiente a tratamiento es menor que 0.05, este factor tiene un efecto estadísticamente significativo sobre RENDIMIENTO con un 95.0% de confianza.

Permite concluir que se observan diferencias entre los distintos niveles de fertilización en el cultivo del espárrago, por lo que se rechaza la hipótesis nula planteada al inicio de la solución.

3.- a) **Análisis de Varianza para aumento de peso**

$H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu_E$
$H_1: \mu_A \neq \mu_B \neq \mu_C \neq \mu_D \neq \mu_E$

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Columnas	0.156869	3	0.0522896	39.53	0.0002
B:Filas	0.00281875	3	0.000939583	0.71	0.5804
C:Tratamiento	0.00256875	3	0.00085625	0.65	0.6127
RESIDUOS	0.0079375	6	0.00132292		
TOTAL (CORREGIDO)	0.170194	15			

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de peso en contribuciones debidas a varios factores (columnas, filas, tratamiento, residuos. Los valores-P prueban la significancia estadística de cada uno de los factores. Puesto que un valor-P, tratamiento, es mayor que 0.05, este factor no tiene un efecto estadísticamente significativo sobre el aumento de peso con un 95.0% de nivel de confianza. Por esta razón la hipótesis no se rechaza, puesto que las diferencias observadas entre los aumentos de peso por cada ración no son significativas.

b) Puesto que en la parte a) no se halló diferencias significativas, la prueba de tukey resulta innecesario.

5.-
a) Análisis estadístico empleando un diseño en cuadrado latino

Análisis de Varianza para Kilos

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
EFECTOS PRINCIPALES					
A:columnas	11871.8	5	2374.36	0.90	0.5027
B:filas	14000.1	5	2800.03	1.06	0.4131
C:tratamiento	256853.	5	51370.7	19.38	0.0000
RESIDUOS	53008.9	20	2650.44		
TOTAL (CORREGIDO)	335734.	35			

Todas las razones-F se basan en el cuadrado medio del error residual

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de Kilos en contribuciones debidas a varios factores. La contribución de cada factor se mide eliminando los efectos de los demás factores. Los valores-P prueban la significancia estadística de cada uno de los factores. Puesto que el valor-P para tratamientos es menor que 0.05, este factor tiene un efecto estadísticamente significativo sobre Kilos con un 95.0% de nivel de confianza.

a) De acuerdo con el resultado del análisis de varianza de la parte (a), puede concluirse que existen diferencias estadísticas significativas entre los diferentes métodos de procesamiento de aceituna.

c) Prueba de Rangos Múltiple de Duncan:

Método: 95.0 porcentaje Duncan

tratamiento	*Casos*	*Media LS*	*Sigma LS*	*Grupos Homogéneos*
D	6	611.667	21.0176	X
F	6	649.0	21.0176	X
C	6	715.0	21.0176	X
E	6	753.333	21.0176	XX
B	6	800.833	21.0176	XX
A	6	858.333	21.0176	X

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*
A - B		57.5
A - C	*	143.333
A - D	*	246.667
A - E	*	105.0
A - F	*	209.333
B - C	*	85.8333
B - D	*	189.167
B - E		47.5
B - F	*	151.833
C - D	*	103.333
C - E		-38.3333
C - F	*	66.0
D - E	*	-141.667
D - F		-37.3333
E - F	*	104.333

* indica una diferencia significativa.

Esta tabla de resultados, aplica un procedimiento de comparación múltiple para determinar cuáles medias son significativamente diferentes de otras. La mitad inferior de la salida muestra las diferencias estimadas entre cada par de medias. El asterisco que se encuentra al lado de los 11 pares indica que estos pares muestran diferencias estadísticamente significativas con un nivel del 95.0% de confianza. En la parte superior de la página, se han identificado 4 grupos homogéneos según la alineación de las X's en columnas. No existen diferencias estadísticamente significativas entre aquellos niveles que compartan una misma columna de X's. Con este método hay un riesgo del 5.0% al decir que uno o más pares son significativamente diferentes, cuando la diferencia real es igual a 0.

9. Eficiencia relativa del diseño cuadrado latino, con respecto al diseño de bloques:

$$\widehat{CME}_{BA} = \frac{(5)(2374.36) + (25)(2650.44)}{(5 + 5 + 30)} = 2604.43$$

$$\widehat{CME}_{ba} = \frac{(5)(2800.03) + (25)(2650.44)}{30} = 2675.37$$

$$ER(CL\ a\ BA) = \frac{\widehat{CME}_{ba}}{\widehat{CME}_{BA}}(100) = \frac{2675.37}{2604.43}(100) = 102.78\%$$

Hay más del 2% de eficiencia al hacer uso del diseño cuadrado latino, frente a un diseño de bloques.

CAPITULO VIII: EXPERIMENTOS FACTORIALES

1. Hipótesis:

a)

$H_0: (\alpha\beta) = 0 \qquad H_1: (\alpha\beta) \neq 0$

b.

Análisis de Varianza para porcentaje - Suma de Cuadrados Tipo III

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
EFECTOS PRINCIPALES					
A:Alimento	446.375	3	148.792	19.85	0.0000
B:temperatura	3040.44	2	1520.22	202.77	0.0000
INTERACCIONES					
AB	645.333	6	107.556	14.35	0.0000
RESIDUOS	449.833	60	7.49722		
TOTAL (CORREGIDO)	4581.99	71			

Todas las razones-F se basan en el cuadrado medio del error residual

La tabla ANOVA descompone la variabilidad de porcentaje en contribuciones debidas a varios factores. La contribución de cada factor se mide eliminando los efectos de los demás factores. Los valores-P prueban la significancia estadística de cada uno de los factores. Puesto que los 3 valores-P son menores que 0.05, estos factores tienen un efecto estadísticamente significativo sobre porcentaje con un 95.0% de nivel de confianza.
La hipótesis nula planteada, indica que existe interacción entre los factores Tipo de alimento y temperatura que repercute en la sobrevivencia de las bacterias.
De la misma forma, se observan diferencias significativas entre las medias de los dos factores.

c. Prueba de Rangos múltiples: se deja al estudiante realizar la prueba que más se adecue a su aprendizaje.

CAPITULO IX y X

Se deja a los lectores ejercitar los ejercicios que se proponen en estos capítulos

ANEXO I

COMO ESCRIBIR UNA TESIS UNIVERSITARIA

El propósito de este anexo, es el de ilustrar la forma en la cual los egresados o estudiantes de las universidades, tanto de la sección de grado, como la de post grado, puedan redactar el informe final de su tesis para optar el grado o título profesional que corresponda, en el sistema universitario peruano.
Se presenta la estructura y las características esenciales que debe contener el informa final, la que por regla general debe estar redactado respetando la buena escritura, y la estructura o formato habitual que consignan los reglamentos de las instituciones superiores, así como los objetivos de cada una de sus partes.
Esto representa un aporte, mas no, una camisa de fuerza para los investigadores noveles y experimentados.

I. RESUMEN O ABSTRAC

Con este resumen se pretende brindar al lector, los hechos más saltantes y los resultados más importantes que se derivan del estudio. La extensión no suele ser más de una o dos páginas. Se consignan los hallazgos de la investigación, así como las conclusiones. Por su ubicación va al inicio del informe, permitiendo un acceso inmediato a la información relevante, por parte de los interesados. Sin embargo, la redacción del resumen, a pesar que va en primera plana presidiendo el informe final, debe escribirse al final, cuando el estudio esté concluido.

II. INTRODUCCIÓN

En esta parte del informe, el investigador debe considerar lo siguiente:

2.1 Formulación del problema. Se debe iniciar el análisis describiendo la naturaleza, el enunciado y la formulación del problema. Y es relevante porque en la descripción debe incluirse antecedentes del problema que resulten esenciales para el cabal entendimiento y formular por qué la solución del problema en discusión es importante, a fin de establecer una hoja de ruta.
Por ejemplo, puede planearse un problema de la siguiente manera: ¿El escaso recurso hídrico en la región Tacna, representa una limitante en el cultivo del Olivo?

2.2 Objetivos de la investigación. Los objetivos que se plantean en una investigación vienen a representar la solución del problema. Si se elabora un árbol de problemas, debe presentarse un árbol de objetivos. Dado que los problemas se generan mediante una lluvia de ideas, los objetivos deben responder a cada uno de los problemas. Frente a la pegunta formulada, el objetivo deber redactarse como sigue: Dotar a las áreas de cultivo del olivo en la región Tacna, de la dosis suficiente de agua para obtener rendimientos que generen utilidades en los empresarios agrícolas.

2.3 Justificación de la investigación. El investigador , debe ser capaz de formular sus justificación, si fuera necesario, bajo tres modalidades:

Justificación social, es decir, el impacto que causa la investigación en el contexto de la sociedad a la que se dirige la investigación.
Justificación económica, El impacto del estudio si se trata de una investigación aplicada orientado a la solución de problemas dentro del marco económico.
Justificación ambiental, Todo proyecto que se inicie causa un impacto en el entorno de influencia del estudio, salvo en el caso de una investigación netamente cualitativa no experimental. Una investigación en laboratorio genera contaminación ambiental. El establecimiento de un centro de producción con fines alimenticios, genera contaminación en el entorno.

III. MARCO TEÓRICO O REVISIÓN DE LITERATURA.

Es la parte fundamental del estudio, puesto que aporta el sustento filosófico de la tesis, en la que se plantean teorías, o principios que fortalecen la investigación. En el caso de una tesis de ingeniería, debe incluirse apropiadamente, las proposiciones y flujos de procesos que involucren procedimientos de laboratorio o de campo. Debe tenerse especial cuidado, en las citas de autores, que traten temas relacionados con el estudio que llevamos a cabo, desde el punto de vista ético y académico.

IV. MATERIALES Y MÉTODOS.

Esta cuarta sección del estudio representa la parte técnica y científica de la investigación, la que brinda la ruta para la ejecución de la investigación y su validación empleando métodos estadísticos. Puesto que explica la naturaleza exacta de las pruebas estadísticas que se emplearon en el estudio. Se debe describir con algún detalle técnico las herramientas cuantitativas y cualitativas que se usaron y la forma como se llega a los resultados que se obtienen.
Así mismo, se consignan los resultados logrados a través de instrumentos de recojo de datos, con respecto a las variables de investigación, tanto, el factor (causa) como el efecto. El investigador, tiene que ser capaz de definir su variable de lectura, es decir, lo que debe registrar en su libreta de notas para ser llevado al informe final. Si es una investigación que requiere de una hipótesis, no olvidar que debe estar concatenado con la formulación del problema y el objetivo planteado.
Ejemplo: "La escasez del recurso hídrico en la región Tacna, limita el rendimiento del olivo y la consecución de utilidades del empresario agrícola"

VI. RESULTADOS O HALLAZGOS

Es la sección en la cual se realizan todos los análisis que sean pertinentes al estudio, a partir de los cuadros y tablas de resultados que se registran. Estos resultados o hallazgos, están constituidos por los cálculos estadísticos que generan la información valiosa para las decisiones que se toman y poder, en base a esos resultados, plantear las recomendaciones que atañen al tema de investigación.
Así mismo, en esta sección, deben presentarse los comentarios por cada resultado que se obtiene para dirigir la atención hacia la significación de los mismos; debe comprobarse la hipótesis y definirse los resultados con hechos previamente establecidos, es decir antecedentes, Recordar que la estadística, *per se*, no demuestra nada, y debemos estar atentos, que existe una probabilidad de que nuestras

conclusiones pueden estar sesgadas. Por tanto, es congruente considerar la posibilidad de manifestar conclusiones incorrectas y sus consecuencias que éstas pueden motivar.

VII. **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

En esta sección, resulta de vital importancia los resultados alcanzados, ya que éstos constituyen el aspecto central de la investigación. No puede ofrecerse conclusiones ni menos recomendaciones si no están respaldados por el análisis e interpretación de los hallazgos.

En la medida que los reportes, análisis, interpretación y conclusiones, se presentan en forma organizada, son muy útiles y lo que es resaltante, proporciona al investigador la credibilidad, autoridad y respeto para quienes confían en él. Evitar, mientras sea posible, arribar a conclusiones aun cuando la investigación es estadísticamente significativa, si los resultados muestran criterios de fuera de lugar, respecto a eventos previamente establecidos. Si esto sucediera, deberá investigarse con mucha profundidad el tema de investigación.

VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Puede seguirse el modelo de la Asociación Americana de Psicólogos, APA, que se refiere a una lista alfabética de libros y otras fuentes consultadas durante el trabajo de investigación.

Por ejemplo, vamos a citar al autor de este trabajo:

Romaina, J.C.(2010). Estadística, Herramientas para el desarrollo de las organizaciones. Tacna, Perú. Editora UPT-Perú.

AMAZONAS: MARAVILLA DEL MUNDO